Conforme aux nouveaux programme du ministère de l'éducation nationale de la formation professionnelle de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

EL HAJJAJI MATHS

- EXERCICES D'ENTRAINEMENT
- EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT
- LES METHODES PAS A PAS
- CORRIGES DETAILLES ET EXPLIQUES

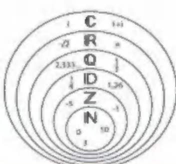


2EME ANNEE BACCALAUREAT
SCIENCES EXPERIMENTALES (PC. SVT. ...)

5

TOME 1

LES NOMBRES COMPLEXES



ÉCRIT ET RÉALISÉ PAR:
PROF: EL BACHIR EL HAJJAJI

نسألكم الدعاء

الأستاذ : البشير الحجاجي



استاذ التعليم الثانوي التأهيلي
بثانوية المسيرة الخضراء التأهيلية
المديرية الإقليمية تيزنيت .

شكر خاص

الشكر الموصول لكلٍّ من:

- الأستاذ : إبراهيم الحجاجي ، أخي الأكبر وصاحب الفضل الكبير
- السيد : إبراهيم إضرضار ، المدير الاقليمي السابق بالمديرية الإقليمية تيزنيت ، على دعمه المتواصل
- الاستاذ والصديق محمد بدر الدين الوزاني « مفتش »
- استاذي الفاضل : المصطفى القفاز ، استاذ سابق بالثانوية التأهيلية كلا مريم أكادير.

نسألكم الدعاء

مُقدِّمة

الحمدُ لله ، والصّلاةُ والسّلامُ على مولانا رسولِ الله .
تزامُناً مع بدايةِ الدُّخول المدرسي 2020-2021، والذي يتّسمُ بظروفٍ خاصّةٍ ، أُهدي لتلاميذِ السّنة الثّانية بكالوريا علوم تجريبيّة ، بجميع مسالكها هذا العمل المتواضع الذي يحتوي على تمارين محلولة ، وكذا تمارين للبحث. راجياً من العلي القدير أن لا تنسونا من خالصِ دُعائكم.

بخطّ البشير الحجّاجي
أستاذ مادّة الرياضيات
الثّانوية التّأهيليّة المسيرة الخضراء
المديرية الإقليمية تيزنيت

نسألكم الدُّعاء

RÉSUMÉ DU COURS

بسم الله الرحمن الرحيم

الثانوية التأهيلية
المسيرة الخضراء - تيزنيت -
بخط الأستاذ :
البشير الحجاجي

Nombres Complexes

Ecriture algébrique

- $z = a + ib \; ; a, b \in \mathbb{R}$
- $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

conjugué de $z = a+ib$

- $\overline{z} = a - ib$
- $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2ib$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \; (z' \neq 0)$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

تسلّح بالعلم

Le module

- $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \; (z' \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|-i| = |i| = 1$

Géométrie

- $Aff(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$
- $AB = |Z_B - Z_A|$
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv arg(Z_B - Z_A) \; [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi]$

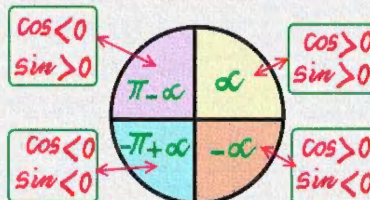
Argument

- $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z) [2\pi]$
- $arg(-z) \equiv \pi + arg(z) [2\pi]$
- $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z') [2\pi]$
- $arg(z^n) \equiv n \, arg(z) [2\pi]$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z') [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0 [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv \pi [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Forme trigonométrique

$z = a + ib = r(\cos\theta + i \sin\theta) = [r; \theta]$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta \equiv arg(z) [2\pi]$



- $[r; \theta][r'; \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$
- $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$
- $[r; \theta]^n = [r^n; n\theta]$ Moivre

Forme exponentielle

$z = re^{i\theta}$ avec : $r=|z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$

$[r;\theta] = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ $e^{i\pi} = -1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ $e^{i0} = 1$

$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E)

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Affixe du milieu M de [AB]

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

A, B et C sont alignés

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

ABC est rectangle en A

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

ABC est isocèle en A

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

ABC est rectangle isocèle en A

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

ABC est équilatéral

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right]$$

Écriture complexe d'une translation t de vecteur $\vec{u}$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

Écriture complexe d'une homothétie h de centre Ω et de rapport k

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' = kz + (1-k)z_\Omega$$

Ω est le seul point invariant par h

Écriture complexe d'une rotation R de centre Ω et d'angle θ

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = (z - z_\Omega)\,e^{i\theta}$$

Ω est le seul point invariant par R


نسألكم الدعاء


البشير الحجاجي

قال ابن قتيبة

لا يزال المرء عالماً ما دام في طلب العلم،

فإن ظنّ أنه قد علم فقد بدأ جهله.

Enoncés des exercices

EXERCICE 1

Sachant que : $i^2=-1$, simplifier les expressions suivantes :
$a=i^4$; $b=i^{100}$; $c=i^{30}$; $d=i^{109}$; $e=i^{-9}$

EXERCICE 2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :
$z_1=5(2+3i)-3(4-5i)$; $z_2=(3-i)(4-5i)$; $z_3=-4i(5+i)-3i$

EXERCICE 3

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :
$z_1=(4-7i)^2-2(1+i)^2$; $z_2=(3-4i)(3+4i)$

EXERCICE 4

Déterminer le conjugué du nombre complexe z dans les cas suivants :
1. $z=3-i$ 2. $z=-3-i$ 3. $z=-3$ 4. $z=2i$

EXERCICE 5

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1=\frac{2-i}{i}$; $z_2=\frac{3}{1-i}$; $z_3=\frac{4+i}{3-2i}$

EXERCICE 6

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1=\frac{1-3i}{3+i}$; $z_2=\frac{1-3i}{3-i}$; $z_3=\frac{a+ib}{b-ia}$
a et b sont deux reéls tel que $(a;b)\neq(0;0)$ (ne sont pas tous nuls)

EXERCICE 7

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=3$; $z_2=-1$; $z_3=2i$; $z_4=-i$

EXERCICE 8

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=3+i$; $z_2=-1-2i$; $z_3=1-i$; $z_4=-1+2i$

EXERCICE 9

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=(3+i)(1+2i)$; $z_2=(1-2i)(-1+2i)(1-\sqrt{3}i)$; $z_3=\dfrac{4+i}{3-2i}$

EXERCICE 10

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=(1-i)^{20}$; $z_2=(1-i)^{20}(1-\sqrt{3}i)^{10}$; $z_3=\dfrac{(1-i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^{10}}$
$z_4=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$

EXERCICE 11

Soit x un nombre reél. On considère le nombre complexe Z défini par l'égalité : $Z=(x-2i)(3+ix)$

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe Z
2. a. Pour quelle valeur (s) de x, Z est un nombre reél ?
   b. Pour quelle valeur(s) de x, Z est un nombre imaginaire pur ?

EXERCICE 12

Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
$A=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+\dots+i^{99}$

EXERCICE 13

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z-4i=(2-i)z+1-i$
2. $\dfrac{z+1}{z-i}=2i$
3. $3z-i\bar{z}=1+2i$

EXERCICE 14

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3z_1-2iz_2=5-5i \\ 2iz_1-3z_2=-1-i \end{cases}$$

EXERCICE 15

Pour tout complexe $z=x+iy$, avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $z\neq -i$, on considère le complexe Z défini par : $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$

1. Déterminer $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z\in\mathbb{R}$
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z\in i\mathbb{R}$
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|=1$

EXERCICE 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :

$$Z=f(z)=\frac{z-2+i}{z+2i}$$

1. On pose $z=x+iy$ avec x et y deux réels.
   Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y
2. En déduire la nature de :
   a. L'ensemble E des points M d'affixe z, tel que

Z soit un reël.

b. L'ensemble F des points M d'affixe z, tel que Z soit un imaginaire pur

c. Représenter ces deux ensembles.

EXERCICE 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+\frac{3}{4}i$; $b=2-\frac{5}{4}i$ et $c=3+\frac{7}{4}i$

1. Placer les point A, B et C
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un carré.
4. Déterminer l'affixe du point I le centre de ABDC
5. Déterminer l'affixe du point E tel que : $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$
6. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminer son centre et son rayon.

EXERCICE 18

Soit $z\in\mathbb{C}^*\setminus\{1\}$ de module 1 (c.à.d $|z|=1$)

Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur

(Autrement dit $\frac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$.)

EXERCICE 19

1. Établir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$
2. Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe z' par : $z'=\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$

a. Pour tout nombre complexe z, établir l'égalité :
$$\frac{z^2-z}{1+2i}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\frac{z-\overline{z}}{3}$$
b. En déduire que le nombre $\frac{z^2-z}{1+2i}$ est un nombre réel.

EXERCICE 20

Pour tout nombre complexe z différent de i, on pose :
$$z'=\frac{iz-1}{z-i}$$
Sachant que $z'\in\mathbb{R}$, prouver que $|z|=1$

EXERCICE 21

Soit z un nombre complexe, on considère les relations suivantes :
- $(E) : |z-1+2i|=2$
- $(F) : |z-1+2i|<2$
- $(G) : |z-2i|=|z+1-2i|$

1. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera son centre et son rayon.
   b. Soit $z=x+iy$ avec x et y deux reéls.
   Déterminer une relation sur x et y caractérisant la relation (E)
   c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (F).
2. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (G) est une droite dont on précisera sa nature.
   b. Soit $z=x+iy$ avec x et y deux reéls.
   Déterminer une relation sur x et y caractérisant la relation (G)

EXERCICE 22

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=1+i$; $Z_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$; $Z_3=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$; $Z_4=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$

EXERCICE 23

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=1+i\sqrt{3}$; $Z_2=-1-i\sqrt{3}$; $Z_3=-4+4i\sqrt{3}$; $Z_4=\sqrt{3}-3i$

EXERCICE 24

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=\sqrt{3}+i$; $Z_2=-\sqrt{3}-i$; $Z_3=-4\sqrt{3}+4i$; $Z_4=3-i\sqrt{3}$

EXERCICE 25

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=2$; $Z_2=-2$; $Z_3=i\sqrt{3}$; $Z_4=-i\sqrt{5}$

EXERCICE 26

La valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Soient $a=1+i$ et $b=\sqrt{3}-i$

1. Écrire a et b sous forme trigonométrique
2. Déterminer la forme algébrique de ab
3. Écrire ab sous forme trigonométrique
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
5. Montrer que $a^{40}+b^{30}\in\mathbb{R}^-$

EXERCICE 27

Soient $a=1+i$ et $b=-1+i\sqrt{3}$

1. Écrire a et b sous forme trigonométrique
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{b}{a}$
3. Écrire $\frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 28

Établir les égalités suivantes :

1. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)(1+i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84}+i\sin\frac{5\pi}{84}\right)$
2. $(1+i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$
3. $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 29

Dans le plan complexe muni de repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A; B et C d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=-3+i$ et $c=3+\frac{5}{2}i$

1. Placer les points A; B et C.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 30

Dans le plan complexe muni de repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+i$; $b=4+5i$ et $c=5-2i$

1. Placer les points A, B et C
2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{b-a}{c-a}$

   b. En déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE 31

On considère les deux nombres complexes suivants :

$z_1=1-i$ et $z_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

1. Écrire z_1 sous forme trigonométrique.
2. a. Écrire $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique, puis sous forme

trigonométrique

b. En déduire une forme trigonométrique de Z_2

EXERCICE 32

On considère les deux nombres complexes :

$Z_1=1-i$ et $Z_2=2+\sqrt{3}+i$

1. Déterminer une forme trigonométrique de Z_1
2. a. Écrire $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme algébrique

   b. Vérifier que $\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

   c. En déduire une forme trigonométrique de Z_2.

EXERCICE 33

Soit $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[$

1. Écrire les deux nombres complexes $z_1=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ et $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$ sous forme trigonométrique
2. On suppose que $\theta\in]\pi;2\pi[$

   Écrire z_2 sous forme trigonométrique

EXERCICE 34

Soit $\theta\in]0;2\pi[$

1. Écrire les deux nombres complexes $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ et $z_2=-1+\cos\theta+i\sin\theta$ sous forme trigonométrique
2. On suppose que $\theta\in]2\pi;4\pi[$

   Écrire z_2 sous forme trigonométrique

EXERCICE 35

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=i\sqrt{3}$, $b=\overline{a}$, $c=3+2i\sqrt{3}$ et $d=\overline{c}$.

Et soit E le symétrique de D par rapport à O.

1. Déterminer l'affixe e du point E

2 - a - Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{c-b}{e-b}$

b - En déduire la nature du triangle BCE

c - Vérifier que le point A est le centre de gravité du triangle BCE.

3 - a - Déterminer l'affixe k du point K le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;-1)$ et $(C;2)$

b - Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

c - Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixe z tel que : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=6$

EXERCICE 36

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C, J et H d'affixes respectives :
$a=-3-i$, $b=-2+4i$, $c=3-i$; $j=i$ et $h=-2$

1 - Placer les points A, B, C, J et H

2 - Montrer que le point J est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de $(\mathcal{C})$

3 - Montrer que les deux droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4 - On note G le centre de gravité du triangle ABC.

a - Déterminer l'affixe g du point G.

b - Placer le point G sur la figure.

5 - Montrer que les points G, J et H sont alignés.

6 - On note A' le milieu du segment [BC] et K celui de [AH]

a - Déterminer a' et k les affixes respectives de A' et K

b - Montrer que le quadrilatère KHA'J est un parallélogramme.

EXERCICE 37

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $a=1+i\sqrt{3}$, $b=1-i\sqrt{3}$ et $c=2$

1) a) Écrire a, b et c sous forme trigonométrique
   b) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera son centre et son rayon.
   c) Placer les points A, B et C.

2) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$
   b) En déduire la nature du triangle ABC, et déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}})$

3) Soit f la transformation du plan complexe, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=z-1+i\sqrt{3}$
   a) Déterminer la nature de f
   b) Vérifier que O est l'image du point B par f
   c) En déduire la nature du quadrilatère OBCA.

EXERCICE 38

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=1+2i$; $b=\overline{a}$ et $c=3$

1) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{a-c}{b-c}$
   b) En déduire la nature du triangle ABC.

2) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par la translation T
   a) Écrire z' en fonction de z.

b- Déterminer l'affixe du point D l'image du point A par la translation T.

c- En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 39

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=iz+2$

M est le point du plan complexe d'affixe z et M' celui d'affixe $f(z)$

1- Calculer $f(1)$, puis placer les points A et A' d'affixes $a=1$ et $a'=f(1)$

2- a- Déterminer la solution c de l'équation $f(z)=z$; c a pour image le point C.

b- Donner le module et un argument de c

c- Donner le module et un argument du nombre $\frac{a'-c}{a-c}$

d- Quelle est la nature du triangle AA'C.

3- On pose $z=x+iy$ avec a et b sont deux réels.

a- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$

b- Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel.

c- Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

d- Déterminer l'ensemble (G) des points $M(z)$ tel que $|f(z)|=2$

EXERCICE 40

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_C=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1- Placer les points A, B et C

2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B}{z_C}$

b. Que peut-on déduire ?

3. Soit I le milieu du segment [AB]

a. Montrer que le triangle OAB est isocèle.

b. Déterminer un argument du nombre z_B, puis en déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$

c. Calculer z_I l'affixe du point I, puis le module de z_I

d. Déduire des résultats précédents, les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 41

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $a=2-3i$, $b=i$ et $c=6-i$

Première partie

1. Placer les points A, B et C
2. Calculer $\frac{b-a}{c-a}$
3. En déduire la nature du triangle ABC.

Deuxième partie

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

1. Soit D le point d'affixe $d=1-i$

Déterminer d' l'affixe du point D' image du point D par f

2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$

b- Montrer que E est un point de la droite (AB).

3- Montrer que pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$

4- Montrer que pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :
$(\overline{\vec{u};\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

5- Montrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6- Montrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 42

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4-2i$, $b = i$ et $c = \frac{4}{3}$

1- Montrer que les points A, B et C sont alignés

2- En déduire que C est l'image de A par une homothétie de centre B dont on donnera le rapport

EXERCICE 43

On considère la transformation h d'écriture complexe :
$z' = -3\left(z - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}i\right)$

1- Déterminer le point fixe de h (noté Ω)

2- Déterminer la nature de h

3- a- Déterminer z_A l'affixe du point A image du point O

b- En déduire que les points O, A et Ω sont alignés.

EXERCICE 44

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega=1-2i$ et de rapport -3

Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par l'homothétie h

1. Montrer que : $z'=-3z+4-8i$
2. a. Déterminer z_A l'affixe du point A image du point O

   b. En déduire que les points O, A et Ω sont alignés.

EXERCICE 45

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\frac{1}{2}i\,z_n+5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n

On considère le point A d'affixe $z_A=4+2i$

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=z_n-z_A$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}i\,u_n$

   b. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.



نسألكم الدعاء



البشير الحجاجي

EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE 1

Sachant que : $i^2=-1$, simplifier les expressions suivantes :
$a=i^4$; $b=i^{100}$; $c=i^{30}$; $d=i^{109}$; $e=i^{-9}$

CORRECTION

- $a=i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$
- $b=i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=1$
- $c=i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$
- $d=i^{109}=i.i^{108}=i.(i^2)^{54}=i.(-1)^{54}=i$
- $e=i^{-9}=i.i^{-10}=i.(i^2)^{-5}=i.(-1)^{-5}=-i$

$i^2=-1$; $(-1)^{2n}=1$; $(-1)^{2n+1}=-1$

EXERCICE 2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :
$z_1=5(2+3i)-3(4-5i)$; $z_2=(3-i)(4-5i)$; $z_3=-4i(5+i)-3i$

CORRECTION

Rappel

Écrire un nombre complexe z sous forme algébrique, c'est-à-dire, l'écrire sous la forme unique
$z=a+ib$ avec a et b sont deux réels
a : C'est la partie réelle de z $(Re(z)=a)$
b : C'est la partie imaginaire de z $(Im(z)=b)$

$z_1=5(2+3i)-3(4-5i)$
$=10+15i-12+15i$
$=-2+30i$

$z_2=(3-i)(4-5i)$
$=12-15i-4i+5i^2$
$=12-19i-5$
$=7-19i$

$z_3=-4i(5+i)-3i$
$=-20i-4i^2-3i$
$=4+23i$

$i^2=-1$

EXERCICE 3

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :
$z_1=(4-7i)^2-2(1+i)^2$; $z_2=(3-4i)(3+4i)$

CORRECTION

$z_1=(4-7i)^2-2(1+i)^2$
$=4^2-2.4.7i+(7i)^2-2(1^2+2.1.i+i^2)$
$=16-56i+49i^2-2(1+2i-1)$
$=16-56i-49-4i$
$=-33-60$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$z_2=(3-4i)(3+4i)$
$=3^2-(4i)^2$
$=9-16i^2$
$=9+16$
$=25$

EXERCICE 4

Déterminer le conjugué du nombre complexe z dans les cas suivants :

1. $z=3-i$ 2. $z=-3-i$ 3. $z=-3$ 4. $z=2i$

CORRECTION

1. $z=3-i \Longleftrightarrow \overline{z}=3+i$
2. $z=-3-i \Longleftrightarrow \overline{z}=-3+i$
3. $z=-3 \Longleftrightarrow \overline{z}=3$
4. $z=2i \Longleftrightarrow \overline{z}=-2i$

Rappel

Si $z=a+ib$ avec $a;b\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{z}=a-ib$

Si $z=a$ avec $a\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{z}=z=a$

Si $z=ib$ avec $b\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{z}=-z=-ib$ $(z+\overline{z}=0)$

EXERCICE 5

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=\frac{2-i}{i}$; $z_2=\frac{3}{1-i}$; $z_3=\frac{4+i}{3-2i}$

CORRECTION

ASTUCE METH

Si $z=\frac{a+ib}{c+id}$ avec $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $(c;d)\neq(0;0)$

Alors pour déterminer la forme algébrique de z, il suffit de multiplier leur numérateur et leur dénominateur par le conjugué de ce dernier.

Et on aura $z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$

- $z_1=\frac{2-i}{i}=\frac{-i(2-i)}{-i.i}=\frac{-2i+i^2}{-i^2}=\frac{-2i-1}{1}=-1-2i$

Si $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Alors $z.\overline{z}=a^2+b^2$

- $z_2=\frac{3}{1-i}=\frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i}{1^2-i^2}=\frac{3+3i}{1+1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$
- $z_3=\frac{4+i}{3-2i}=\frac{(4+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{12+8i+3i+2i^2}{3^2+2^2}=\frac{12+11i-2}{13}=\frac{10}{13}+\frac{11}{13}i$

EXERCICE 6

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=\frac{1-3i}{3+i}$; $z_2=\frac{1-3i}{3-i}$; $z_3=\frac{a+ib}{b-ia}$

a et b sont deux reéls tel que $(a;b)\neq(0;0)$(ne sont pas tous nuls)

CORRECTION

- $z_1=\frac{1-3i}{3+i}$
$=\frac{i(1-3i)}{3+i}.(-i)$
$=\frac{i+3}{3+i}(-i)$
$=-i$

- $z_2=\frac{1-3i}{3-i}$
$=\frac{-i(1-3i)}{3-i}.i$
$=\frac{-i+3}{3-i}.i$
$=i$

- $z_3=\frac{a+ib}{b-ia}$
$=\frac{-i(a+ib)}{b-ia}.i$
$=\frac{-ia+b}{b-ia}.i$
$=i$

$i^2=-1$

Ici, remarquer que $ac+bd=0$ dans la remarque précédente
Donc forcement z_1, z_2 et z_3 sont des nombres imaginaires purs.
Dans ce cas, il suffit de multiplier le numérateur par i et $-i$ ou bien par $-i$ et i , sachant que $-i.i=1$

EXERCICE 7

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=3$; $z_2=-1$; $z_3=2i$; $z_4=-i$

CORRECTION

Si $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Alors: $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

- $z_1=3$ $\begin{cases}a=3\\b=0\end{cases}$
→ $|z_1|=3$

- $z_2=-1$ $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$
→ $|z_2|=1$

$z_3 = 2i$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

$\hookrightarrow |z_3| = 2$

$z_4 = -i$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

$\hookrightarrow |z_4| = 1$

EXERCICE 8

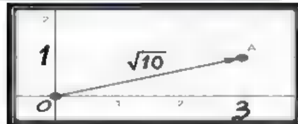
Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = 3 + i$; $z_2 = -1 - 2i$; $z_3 = 1 - i$; $z_4 = -1 + 2i$

CORRECTION

Si $z = a + ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$
Alors : $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

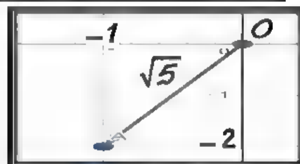
$z_1 = 3 + i$

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$



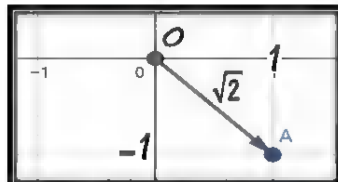
$z_2 = -1 - 2i$

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$



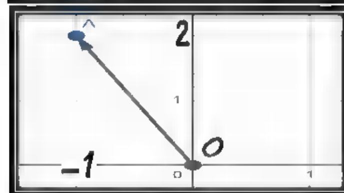
$z_3 = 1 - i$

$|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$



$z_4 = -1 + 2i$

$|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



EXERCICE 9

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = (3+i)(1+2i)$; $z_2 = (1-2i)(-1+2i)(1-\sqrt{3}i)$; $z_3 = \frac{4+i}{3-2i}$

CORRECTION

$|z.z'| = |z||z'|$

$z_1 = (3+i)(1+2i)$

$|z_1| = |(3+i)(1+2i)|$
$= |3+i||1+2i|$
$= \sqrt{3^2+1^2}\ \sqrt{1^2+2^2}$
$= \sqrt{50}$

$z_2=(1-2i)(-1+2i)(1-\sqrt{3}i)$

$|z_2|=|(1-2i)(-1+2i)(1-\sqrt{3}i)|$
$=|1-2i||-1+2i||1-\sqrt{3}i|$
$=\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{5}\sqrt{5}.2$
$=10$

$|z.z'.z''|=|z||z'||z''|$

$z_3=\frac{4+i}{3-2i}$

$|z_3|=\left|\frac{4+i}{3-2i}\right|=\frac{|4+i|}{|3-2i|}=\frac{\sqrt{4^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{221}}{13}$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\ ;\ z'\neq0$

EXERCICE 10

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=(1-i)^{20}\ ;\ z_2=(1-i)^{20}(1-\sqrt{3}i)^{10}\ ;\ z_3=\frac{(1-i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^{10}}$

$z_4=\cos\theta+i\sin\theta\ \ (\theta\in\mathbb{R})$

CORRECTION

$|z^n|=|z|^n\ (n\in\mathbb{N})$

$z_1=(1-i)^{20}$

$|z_1|=|(1-i)^{20}|=|1-i|^{20}=\sqrt{1^2+(-1)^2}^{\,20}=\sqrt{2}^{\,20}=2^{10}=1024$

$|z.z'|=|z||z'|$

$z_2=(1-i)^{20}(1-\sqrt{3}i)^{10}$

$|z_2|=|(1-i)^{20}(1-\sqrt{3}i)^{10}|=|1-i|^{20}|1-\sqrt{3}i|^{10}=\sqrt{2}^{\,20}.\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}^{\,10}=2^{10}.2^{10}=2^{20}$

$z_3=\frac{(1-i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^{10}}$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\ ;\ z'\neq0$

$|z_3|=\left|\frac{(1-i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^{10}}\right|=\frac{|(1-i)^{20}|}{|(1-\sqrt{3}i)^{10}|}=\frac{2^{10}}{2^{10}}=1$

$z_4=\cos\theta+i\sin\theta$

$|z_4|=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}=1$

EXERCICE 11

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe Z défini par l'égalité : $Z=(x-2i)(3+ix)$

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe Z
2. a. Pour quelle valeur(s) de x, Z est un nombre réel ?
   b. Pour quelle valeur(s) de x, Z est un nombre imaginaire pur ?

CORRECTION

Rappel

Écrire un nombre complexe Z sous forme algébrique, c'est-à-dire, l'écrire sous la forme unique $Z=a+ib$ avec a et b sont deux réels
a : C'est la partie réelle de Z $(Re(Z)=a)$
b : C'est la partie imaginaire de Z $(Im(Z)=b)$

1. On a : $Z=(x-2i)(3+ix)$
Donc : $Z=3x+ix.x-6i-2i^2x$
$=3x+ix^2-6i+2x$
$=5x+i(x^2-6)$
D'où : $Re(Z)=5x$ et $Im(Z)=x^2-6$

2. a. Z est un nombre réel lorsque sa partie imaginaire est nulle

Si $Z=a$ avec $a\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{Z}=Z=a$

$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Im(Z)=0$

Donc $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-6=0$
$\Leftrightarrow x^2=6$
$\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ou $x=-\sqrt{6}$

$x^2=a\Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$
avec $a>0$

Ainsi, les valeurs de x rendant Z un nombre réel sont $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$

b. Z est un nombre imaginaire pur si sa partie réelle est nulle.

Si $Z=ib$ avec $b\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{Z}=-Z=-ib$ $(Z+\overline{Z}=0)$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Re(Z)=0$

Donc $5x=0$
D'où $x=0$

Si $ax=0$ et $a\neq0$
Alors $x=0$

Ainsi, pour que Z soit imaginaire pur, il faut que $x=0$

EXERCICE 12

Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
$A=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+\dots+i^{99}$

A est la somme des 100 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q=i$

Donc $A=1.\frac{1-i^{100}}{1-i}$
$=\frac{1-(i^2)^{50}}{1-i}$
$=\frac{1-(-1)^{50}}{1-i}$
$=\frac{1-1}{1-i}$
$=0$

$i^2=-1$

$(-1)^{2n}=1$

Soit $S=u_p+u_{p+1}+\dots+u_n$ avec (u_n) est une suite géométrique de raison q
Alors $S=u_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
avec $n-p+1$ est le nombre de termes de S.

EXERCICE 13

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $3z-4i=(2-i)z+1-i$ 2) $\frac{z+1}{z-i}=2i$ 3) $3z-i\bar{z}=1+2i$

CORRECTION

1) $3z-4i=(2-i)z+1-i$
$3z-(2-i)z=1-i+4i$
$(3-(2-i))z=1+3i$
$(1+i)z=1+3i$
$z=\frac{1+3i}{1+i}$
$z=\frac{4}{2}+\frac{2}{2}i$
$z=2+i$
D'où $S=\{2+i\}$

Ici, juste une équation du premier degré dont l'inconnu est z

$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$

2) $\frac{z+1}{z-i}=2i$
Cette équation est définie lorsque $z-i\neq 0$
c'est-à-dire $z\neq i$
Soit $z\neq i$

$$\frac{z+1}{z-i}=2i \Leftrightarrow z+1=2i(z-i)$$
$$\Leftrightarrow z+1=2iz-2i^2$$
$$\Leftrightarrow z+1=2iz+2$$
$$\Leftrightarrow z-2iz=2-1$$
$$\Leftrightarrow z(1-2i)=1$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{1-2i}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1+2i}{1^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

D'où $S=\left\{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right\}$

3 $3z-i\overline{z}=1+2i$ (E)

On pose $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

L'équation (E) devient :

$3(x+iy)-i(x-iy)=1+2i$

$3x+3iy-ix+i^2y=1+2i$

$3x+3iy-ix-y=1+2i$

$3x-y+i(3y-x)=1+2i$

Cette équation contient z et $\overline{z}$
Dans ce cas, on pose $z=x+iy$
avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $\overline{z}=x-iy$

Soient $a;b;c$ et d quatre reels
$a+ib=c+id \Leftrightarrow a=c$ et $b=d$

$$\begin{cases}3x-y=1\\-x+3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-1\\-x+3(3x-1)=2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-1\\-x+9x-3=2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-1\\8x=5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-1=3.\frac{5}{8}-1=\frac{7}{8}\\x=\frac{5}{8}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{8}\\y=\frac{7}{8}\end{cases}$$

Donc : $z=\frac{5}{8}+\frac{7}{8}i$

D'où : $S=\left\{\frac{5}{8}+\frac{7}{8}i\right\}$

EXERCICE 14

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3z_1 - 2iz_2 = 5-5i \\ 2iz_1 - 3z_2 = -1-i \end{cases}$$

CORRECTION

Remarque

Pour résoude ce système, on peut utiliser la combinaison affine ou bien la méthode de Cramer

Ça sera mieux d'utiliser la méthode de Cramer. (Les déterminants)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Si $D \neq 0$

Alors $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & -2i \\ 2i & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3) - 2i\cdot(-2i) = -9 + 4i^2 = -13$

Puisque $D \neq 0$

Alors le système admet une solution unique.

$D_{z_1} = \begin{vmatrix} 5-5i & -2i \\ -1-i & -3 \end{vmatrix}$
$= -3(5-5i) + 2i(-1-i)$
$= -15 + 15i - 2i - 2i^2$
$= -15 + 13i + 2$
$= -13 + 13i$

$z_1 = \frac{D_{z_1}}{D} = \frac{-13+13i}{-13} = 1-i$

$D_{z_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5-5i \\ 2i & -1-i \end{vmatrix}$
$= 3(-1-i) - 2i(5-5i)$
$= -3 - 3i - 10i + 10i^2$
$= -3 - 13i - 10$
$= -13 - 13i$

$z_2 = \frac{D_{z_2}}{D} = \frac{-13-13i}{-13} = 1+i$

D'où : $S = \{1-i ; 1+i\}$

EXERCICE 15

Pour tout complexe $z = x + iy$, avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \neq -i$,

on considère le complexe Z défini par : $Z = \frac{z-i}{z+i}$

1. Déterminer $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z \in \mathbb{R}$
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z \in i\mathbb{R}$
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|=1$

CORRECTION

1. Déterminons $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y

On a : $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$ et $z=x+iy$

Donc :
$$Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}$$
$$=\frac{(x+iy-i)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))}$$
$$=\frac{x^2-x(y+1)i+ixy-i^2y(y+1)-ix+i^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$
$$=\frac{x^2-xyi-xi+ixy+y^2+y-ix-y-1}{x^2+(y+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}i$$

$$Z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

D'où : $Re(Z)=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ et $Im(Z)=\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$

$$Z=Re(Z)+i\,Im(Z)$$

2. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z \in \mathbb{R}$

Pour que Z soit un réel, il faut que $Im(Z)=0$

Donc :
$$Z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow -2x=0 \text{ et } x^2+(y+1)^2\neq 0$$

$\dfrac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b\neq 0$

$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

$a^2+b^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ ou $b\neq 0$

$\Leftrightarrow x=0$ et $(x\neq 0$ ou $y\neq -1)$

$\Leftrightarrow x=0$ et $(x;y)\neq(0;-1)$

Donc M appartient à la droite d'équation $x=0$ (l'axe imaginaire) privé du point $A(0;-1)$

> Si $ax=0$ et $a\neq 0$
> Alors $x=0$

3. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z\in i\mathbb{R}$

Pour que Z soit un nombre imaginaire pur, il faut que $Re(Z)=0$

Donc :

$$Z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \text{ et } x^2+(y+1)^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1 \text{ et } (x\neq 0 \text{ ou } y\neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=1^2 \text{ et } (x;y)\neq(0;-1)$$

D'où M appartient au cercle $O(0;0)$ et de rayon $R=1$ privé du point

> $\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b\neq 0$

> $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

> $a^2+b^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ ou $b\neq 0$

> L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ est le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R

4. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|=1$

1ère méthode | **Géométrique**

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=-i$

On a

$$|Z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|}=1$$

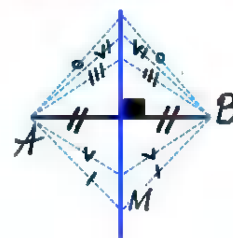
$$\Leftrightarrow |z-i|=|z+i|$$

$$\Leftrightarrow |z-i|=|z-(-i)|$$

$$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B|$$

$$\Leftrightarrow AM=BM$$

> $AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$



Le point M étant équidistant des points A et B

D'où M appartient à la médiatrice du segment [AB]

2ème méthode : Analytique

Soit $z=x+iy$ avec $x;y\in\mathbb{R}$ et $z\neq -i$

On a : $|Z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$

$$\Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|}=1$$

$$\Leftrightarrow |z-i|=|z+i|$$

$$\Leftrightarrow |x+iy-i|=|x+iy+i|$$

$$\Leftrightarrow |x+i(y-1)|=|x+i(y+1)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+y^2+2y+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1-x^2-y^2-2y-1=0$$

$$\Leftrightarrow -4y=0$$

$$\Leftrightarrow y=0$$

Donc M appartient à la droite d'équation $y=0$ (l'axe reél)
(Dans ce cas, le point $A(0;-1)$ n'appartient pas à la droite d'équation $y=0$)

EXERCICE 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :

$$Z=f(z)=\frac{z-2+i}{z+2i}$$

1. On pose $z=x+iy$ avec x et y deux reéls.
   Exprimer la partie reélle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y
2. En déduire la nature de :
   a. L'ensemble E des points M d'affixe z, tel que Z soit un reél.
   b. L'ensemble F des points M d'affixe z, tel que Z soit un imaginaire pur
   c. Représenter ces deux ensembles.

1. Soit $z=x+iy$ avec $x;y\in\mathbb{R}$

Exprimons $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y

On a :

$$Z=\frac{z-2+i}{z+2i}$$

$$=\frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i}$$

$$=\frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)}$$

$$=\frac{x(x-2)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{x(y+1)-(x-2)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{xy+x-(xy+2x-2y-4)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{xy+x-xy-2x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

Il suffit de remplacer z par $x+iy$

Ici ; j'utilise juste la règle suivante :

$$Z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

avec $a=(x-2)$; $b=(y+1)$; $c=x$ et $d=(y+2)$

$Z=Re(Z)+i\,Im(Z)$

D'où : $Re(Z)=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $Im(Z)=\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$

2. a. Déterminons l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit un reél

Pour que Z soit un reél ($Z\in\mathbb{R}$), il faut que $Im(Z)=0$

Donc :

$$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Im(Z)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -x+2y+4=0 \text{ et } x^2+(y+2)^2\neq0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2y-4)=0 \text{ et } (x\neq0 \text{ ou } y\neq-2)$$

$$\Leftrightarrow x-2y-4=0 \text{ et } (x;y)\neq(0;-2)$$

$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Im(Z)=0$

$\frac{a}{b}=0\Leftrightarrow a=0$ et $b\neq0$

Si $ax=0$ et $a\neq0$ Alors $x=0$

Donc l'ensemble E est la droite (D) d'équation : $x-2y-4=0$ privé du point $A(0;-2)$

b. Déterminons l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit un nombre imaginaire pur

Pour que Z soit un nombre imaginaire pur, il faut que $Re(Z)=0$

$Z \in i\mathbb{R} \iff Re(Z)=0$

$$\iff \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$$

$$\iff x^2+y^2-2x+3y+2=0 \text{ et } x^2+(y+2)^2\neq 0$$

$$\iff x^2-2x+y^2+3y+2=0 \text{ et } (x\neq 0 \text{ ou } y\neq -2)$$

$$\iff x^2-2x+1^2-1^2+y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0 \text{ et } (x;y)\neq(0;-2)$$

$$\iff (x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \text{ et } (x;y)\neq(0;-2)$$

$$\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \text{ et } (x;y)\neq(0;-2)$$

D'où F est le cercle de centre $\Omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $A(0;-2)$

Rappel

Pour déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ tel que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$. On suit la méthode suivante :

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$x^2+ax+y^2+by+c=0$

$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+by+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

Donc (Γ) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

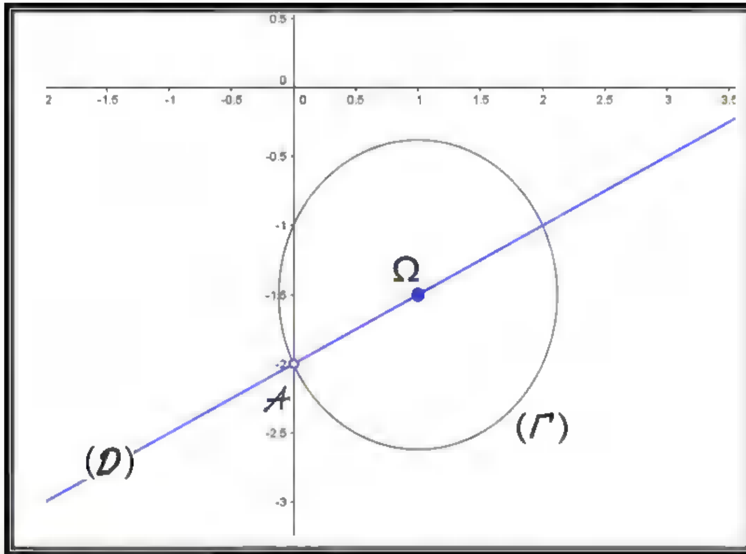
c- La représentation de E et F

L'ensemble E est la droite (D) d'équation : $x-2y-4=0$

(D) passe par les deux point $A(0;-2)$ et $B(4;0)$

(Privé de A $(A\notin(D))$)

L'ensemble F est le cercle (Γ) de centre $\Omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et passe par le point $A(0;-2)$ (Privé de A $(A\notin(\Gamma))$)



EXERCICE 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+\frac{3}{4}i$; $b=2-\frac{5}{4}i$ et $c=3+\frac{7}{4}i$

1. Placer les point A, B et C
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un carré.
4. Déterminer l'affixe du point I le centre de $ABDC$
5. Déterminer l'affixe du point E tel que : $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$
6. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminer son centre et son rayon.

CORRECTION

1. On a : $a=1+\frac{3}{4}i$

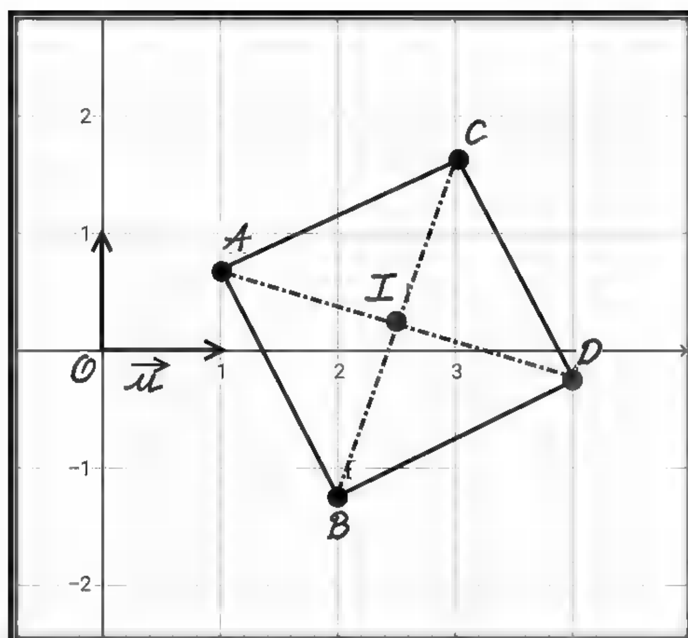
Donc : $A\left(1;\frac{3}{4}\right)$

On a : $b=2-\frac{5}{4}i$

Donc : $B\left(2;-\frac{5}{4}\right)$

On a : $c=3+\frac{7}{4}i$

Donc : $C\left(3;\frac{7}{4}\right)$



2 - La nature du triangle ABC.

Calculons les distances AB ; AC et BC

$AB = |z_B - z_A|$
$= |b - a|$
$= \left|2 - \frac{5}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right)\right|$
$= \left|2 - \frac{5}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i\right|$
$= |1 - 2i|$
$= \sqrt{1^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{5}$

Il faut pas oublier les parenthèses.

Il faut écrire $b-a$ sous forme algébrique $b - a = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $|b - a| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$AC = |z_C - z_A|$
$= |c - a|$
$= \left|3 + \frac{7}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right)\right|$
$= \left|3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i\right|$
$= |2 + i|$
$= \sqrt{2^2 + 1^2}$
$= \sqrt{5}$

$BC = |z_C - z_B|$
$= |c - b|$
$= \left|3 + \frac{7}{4}i - \left(2 - \frac{5}{4}i\right)\right|$
$= \left|3 + \frac{7}{4}i - 2 + \frac{5}{4}i\right|$
$= |1 + 3i|$
$= \sqrt{1^2 + 3^2}$
$= \sqrt{10}$

[BC] est l'hypoténuse Car : $BC > AB$ et $BC > AC$

On a $AB = AC$
Donc le triangle ABC est isocèle en A.
Et on a : $AB^2 = 5$, $AC^2 = 5$ et $BC^2 = 10$
Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Donc, d'après la ~~rece~~ réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en A

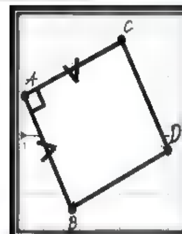
Conclusion

ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Remarque

On peut aussi déterminer la nature du triangle ABC en calculons le rapport $\frac{b-a}{c-a}$
(On va voir ceci إن شاء الله تعالى)

3. Déterminons l'affixe du point D.



On a ABC est un triangle rectangle isocèle en A,
Donc, pour que le quadrilatère ABDC soit un carré,
il suffit qu'il soit un parallélogramme

Donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Donc $d - c = b - a$

$d = b + c - a$

$d = 2 - \frac{5}{4}i + 3 + \frac{7}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right)$

$= 5 + \frac{2}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$

$d = 4 - \frac{1}{4}i$

Attention à l'ordre

Ça sera mieux de mettre le point D (inconnu) à l'extrémité

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A$

D'où l'affixe du point D est $d = 4 - \frac{1}{4}i$ (Voir la figure)(Question 1)

4. L'affixe du point I le centre de ABDC.

On a ABDC est un parallélogramme
Donc I est le milieu du segment [BC]

Donc: $z_I = \frac{z_B + z_C}{2}$

$z_I = \frac{b + c}{2}$

$= \frac{2 - \frac{5}{4}i + 3 + \frac{7}{4}i}{2}$

$= \frac{5 + \frac{1}{2}i}{2}$

$= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i$

D'où : $z_I = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i$

On a aussi I est le milieu de [AD]
Mais, ça sera mieux de choisir [BC]
car il se peut que l'affixe du point D trouvée est fausse.

I est le milieu du segment [AB]
$\Updownarrow$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

5. Déterminons l'affixe du point E tel que : $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

Par passage à les affixes, on aura :

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D-z_C=z_B-z_A$$

$z_E-z_A+2(z_E-z_B)=z_C-z_A$

$z_E-z_A+2z_E-2z_B=z_C-z_A$

$3z_E=z_C-z_A+z_A+2z_B$

Donc $z_E=\dfrac{z_C+2z_B}{3}$

$=\dfrac{c+2b}{3}$

$=\dfrac{3+\frac{7}{4}i+2\left(2-\frac{5}{4}i\right)}{3}$

$=\dfrac{3+\frac{7}{4}i+4-\frac{10}{4}i}{3}$

$=\dfrac{7-\frac{3}{4}i}{3}$

$=\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{4}i$

D'où $z_E=\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{4}i$

6. On a ABC est un triangle rectangle en A

Donc ABC est inscrit dans un cercle (Γ) de centre I le milieu de $[BC]$ (l'hypoténus) et de rayon $R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Rappel

Tout triangle rectangle ABC en A est inscrit dans un cercle de centre Ω le milieu de $[BC]$

EXERCICE 18

Soit $z\in\mathbb{C}^*\setminus\{1\}$ de module 1 (c-à-d $|z|=1$)

Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur

(Autrement dit $\dfrac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$.)

CORRECTION

Remarques

- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$; tel que : $z = ai$
- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$
- $|Z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{Z\overline{Z}} = 1 \Leftrightarrow Z\overline{Z} = 1 \Leftrightarrow \overline{Z} = \frac{1}{Z}$

On pose : $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Montrons que : $\overline{Z} = -Z$

$\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$; $Z' \neq 0$

On a : $\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}$

$= \frac{\overline{z+1}}{\overline{z-1}}$

Si $a \in \mathbb{R}$ Alors $\overline{a} = a$ ☞ $\overline{1} = 1$

$= \frac{\overline{z}+\overline{1}}{\overline{z}-\overline{1}}$

$= \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}$

$|Z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{Z\overline{Z}} = 1 \Leftrightarrow Z\overline{Z} = 1 \Leftrightarrow \overline{Z} = \frac{1}{Z}$

$\overline{z} = \frac{1}{z}$ Car : $|z| = 1$

$= \frac{\frac{1+z}{z}}{\frac{1-z}{z}}$

$= \frac{1+z}{z} \cdot \frac{z}{1-z}$

$= \frac{1+z}{1-z}$

$= \frac{z+1}{-(z-1)}$

$= -\frac{z+1}{z-1}$

$= -Z$

Donc : $\overline{Z} = -Z$

Et par suite $Z \in i\mathbb{R}$

D'où $\frac{z+1}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur avec $|z| = 1$

EXERCICE 19

1. Établir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$

2. Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe z' par : $z'=\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$

   a. Pour tout nombre complexe z, établir l'égalité :
   $$\frac{z'-z}{1+2i}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\,\frac{z-\overline{z}}{3}$$

   b. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{1+2i}$ est un nombre réel.

CORRECTION

1. Soit $z\in\mathbb{C}^*$

$$\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(\overline{z^2}-\overline{1})$$
$$=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(\overline{z}^2-1)$$
$$=(\overline{z}^2-1)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$=\overline{z}^2\left(1-\frac{1}{\overline{z}^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$=-\overline{z}^2\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$=-\overline{z}^2\left(\overline{\left(\frac{1}{z^2}\right)}-\overline{1}\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$=-\overline{z}^2\,\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$$

$\sqrt{z.\overline{z}}=|z|$

$z.\overline{z}=|z|^2$

D'où : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$.

2. a. Soit $z\in\mathbb{C}$

Montrons que : $\frac{z'-z}{1+2i}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\,\frac{z-\overline{z}}{3}$

On a : $z'=\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$

$$\frac{z'-z}{1+2i}=\frac{\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}-z}{1+2i}$$
$$=\frac{\frac{3z+4iz+5\overline{z}-6z}{6}}{1+2i}$$
$$=\frac{-3z+4iz+5\overline{z}}{6(1+2i)}$$
$$=\frac{(-3z+4iz+5\overline{z})(1-2i)}{6(1+2i)(1-2i)}$$
$$=\frac{-3z+4iz+5\overline{z}+6iz-8i^2z-10i\overline{z}}{6(1^2+2^2)}$$

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

$$=\frac{-3z+4iz+5\overline{z}+6iz+8z-10i\overline{z}}{6.5}$$
$$=\frac{5z+5\overline{z}+10iz-10i\overline{z}}{30}$$
$$=\frac{5(z+\overline{z})}{30}+i\frac{10(z-\overline{z})}{30}$$
$$=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\frac{z-\overline{z}}{3}$$

D'où : $\frac{z'-z}{1+2i}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\frac{z-\overline{z}}{3}$

b. Déduisons que le nombre $\frac{z'-z}{1+2i}$ est un nombre reél.

Remarques

Soit $z=a+ib$ avec $a;b\in\mathbb{R}$

$\overline{z}=a-ib$

On a : $\begin{cases} z+\overline{z}=2a\in\mathbb{R} \\ z-\overline{z}=2ib\in i\mathbb{R}. \end{cases}$

Soit $z\in\mathbb{C}$

On a $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$

Donc : $\frac{z+\overline{z}}{6}\in\mathbb{R}$

Et on a : $z-\overline{z}\in i\mathbb{R}$

Donc : $\frac{z-\overline{z}}{3}\in i\mathbb{R}$

Et : $i\frac{z-\overline{z}}{3}\in\mathbb{R}$

Si $Z\in i\mathbb{R}$
Alors $iZ\in\mathbb{R}$

La somme de deux nombres reéls est un réel

Et par suite $\frac{z+\bar{z}}{6}+i\frac{z-\bar{z}}{3}$ est un nombre reél.

D'où ; $\frac{z'-z}{1+2i}$ est un nombre reél.

EXERCICE 20

Pour tout nombre complexe z différent de i, on pose : $z'=\frac{iz-1}{z-i}$

Sachant que $z'\in\mathbb{R}$, prouver que $|z|=1$

CORRECTION

On a $z'\in\mathbb{R}$

Donc $z'=\overline{z'}$

Si $Z=a$ avec $a\in\mathbb{R}$
Alors $\bar{Z}=Z=a$

$$z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z'}=z'$$

$$\Leftrightarrow\overline{\left(\frac{iz-1}{z-i}\right)}=\frac{iz-1}{z-i}$$

$\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)}=\frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$; $Z'\neq0$

$$\Leftrightarrow\frac{\overline{iz-1}}{\overline{z-i}}=\frac{iz-1}{z-i}$$

Si $a\in\mathbb{R}$
Alors $\bar{a}=a$

$\bar{1}=1$

$$\Leftrightarrow\frac{\bar{i}\bar{z}-\bar{1}}{\bar{z}-\bar{i}}=\frac{iz-1}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\bar{i}\bar{z}-1}{\bar{z}+i}=\frac{iz-1}{z-i}$$

$\bar{i}=-i$

$i^2=-1$

$$\Leftrightarrow\frac{-i\bar{z}-1}{\bar{z}+i}=\frac{iz-1}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow(-i\bar{z}-1)(z-i)=(\bar{z}+i)(iz-1)$$

$$\Leftrightarrow-iz\bar{z}+i^2\bar{z}-z+i=iz\bar{z}-\bar{z}+i^2z-i$$

$$\Leftrightarrow-iz\bar{z}-\bar{z}-z+i=iz\bar{z}-\bar{z}-z-i$$

$$\Leftrightarrow-iz\bar{z}-iz\bar{z}=-\bar{z}-z-i+\bar{z}+z-i$$

$$\Leftrightarrow-2iz\bar{z}=-2i$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}=1$$

$$\Leftrightarrow|z|^2=1$$

$$\Leftrightarrow|z|=1$$

EXERCICE 21

Soit z un nombre complexe, on considère les relations suivantes:

- $(E) : |z-1+2i|=2$
- $(F) : |z-1+2i|<2$
- $(G) : |z-2i|=|z+1-2i|$

1 - a - Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera son centre et son rayon.

b - Soit $z=x+iy$ avec x et y deux reéls.
Déterminer une relation sur x et y caractérisant la relation (E)

c - Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (F).

2 - a - Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (G) est une droite dont on précisera sa nature.

b - Soit $z=x+iy$ avec x et y deux reéls.
Déterminer une relation sur x et y caractérisant la relation (G)

CORRECTION

1 - a - On a : $|z-1+2i|=2$

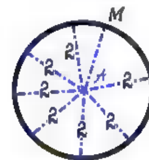
Donc : $|z-(1-2i)|=2$

Notons A le point d'affixe $z_A=1-2i$

Donc : $|z-(1-2i)|=2 \iff |z_M-z_A|=2$
$\iff AM=2$

$z_A=1-2i$
Donc $A(1;-2)$

$z=z_M$



Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(1;-2)$ et de rayon $R=2$

b - Soit $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On a : $|z-1+2i|=2 \iff |x+iy-1+2i|=2$
$\iff |x-1+i(y+2)|=2$
$\iff \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=2$

Si $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Alors: $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

D'où : $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Cette expression est une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{E})$ de centre $A(1;-2)$ et de rayon $R=\sqrt{4}=2$

L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ est le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R

c. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

On a : $|z-1+2i|<2$

Donc : $|z-(1-2i)|<2$

Notons A le point d'affixe $z_A=1-2i$

Donc : $|z-(1-2i)|<2 \Leftrightarrow |z_M-z_A|<2$

$\Leftrightarrow AM<2$



M est strictement à l'interieur du cercle de centre A et de rayon $R=2$

D'où (F) est le disque de centre $A(1;-2)$ et de rayon $R=\sqrt{4}=2$ privé des points du cercle $\mathcal{E}(A;2)$

2. a. On a : $|z-2i|=|z+1-2i|$

Donc : $|z-2i|=|z-(-1+2i)|$

En notant respectivement B et C les points d'affixes $z_B=2i$ et $z_C=-1+2i$

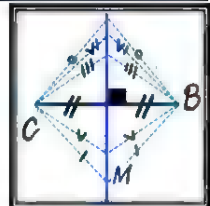
$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

On aura donc $|z_M-z_B|=|z_M-z_C|$

Donc $BM=CM$

Ainsi, l'ensemble des points M est l'ensemble des points équistants des points B et C :

C'est la médiatrice du segment $[BC]$



b. Soit $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On a : $|z-2i|=|z+1-2i|$

Donc : $|x+iy-2i|=|x+iy+1-2i| \Leftrightarrow |x+i(y-2)|=|x+1+i(y-2)|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2=x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

On remarque que cette équation est une équation d'une droite

EXERCICE 22

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=1+i$; $Z_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$; $Z_3=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$; $Z_4=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$

CORRECTION

Rappel

Soit $z=a+ib$ avec a et b deux réels.
Écrire z sous une forme trigonométrique revient à déterminer deux réels r et θ tels que :
$r>0$ et $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

avec : $\begin{cases} r=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta\equiv\arg(z)\,[2\pi] \end{cases}$

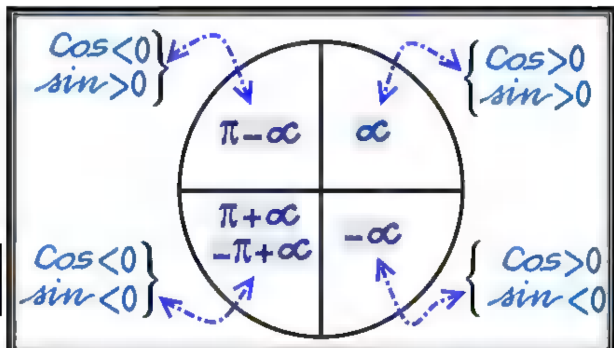
- $Z_1=1+i$

$|Z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

On détermine d'abord le module, puis on factorise par ce dernier pour déterminer un argument

$$\begin{aligned} Z_1&=1+i \\ &=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



- $Z_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$

$$\begin{aligned} |Z_2|&=\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\right| \\ &=\left|\frac{2}{3}(1-i)\right| \\ &=\left|\frac{2}{3}\right|\cdot|1-i| \\ &=\frac{2}{3}\sqrt{1^2+(-1)^2} \\ &=\frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$|Z.Z'|=|Z||Z'|$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser

$Z_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

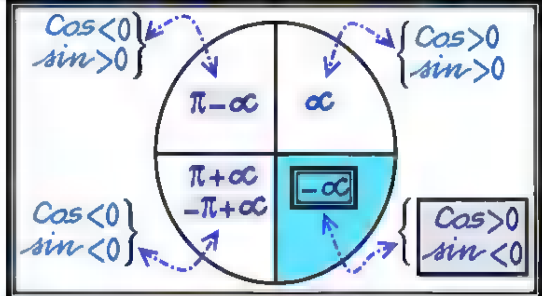
$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

Bien sur, on va penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$

Mais, $\begin{cases}\cos>0\\ \sin<0\end{cases}$ donc un argument de sera $\theta=-\alpha=-\frac{\pi}{4}$



$Z_3=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

$|Z_3|=|-\sqrt{3}+i\sqrt{3}|$

$=|\sqrt{3}(-1+i)|$

$=|\sqrt{3}|\cdot|-1+i|$

$=\sqrt{3}\sqrt{(-1)^2+1^2}$

$=\sqrt{3}\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|Z.Z'|=|Z||Z'|$

$Z_3=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

$=\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)$

$=\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

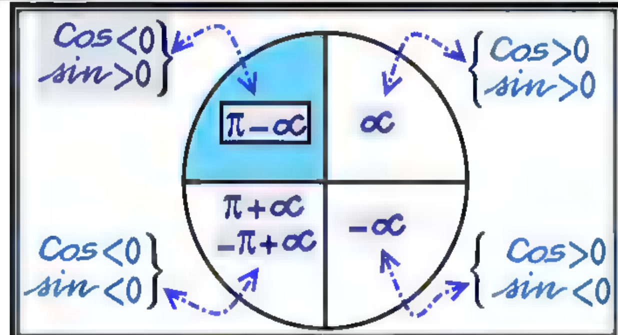
$=\sqrt{6}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\sqrt{6}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$=\left[\sqrt{6};\frac{3\pi}{4}\right]$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



$Z_4=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$

$|Z_4|=|-\sqrt{5}-i\sqrt{5}|$

$=|\sqrt{5}(-1-i)|$

$=|\sqrt{5}|\cdot|-1-i|$

$=\sqrt{5}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{5}\sqrt{2}$

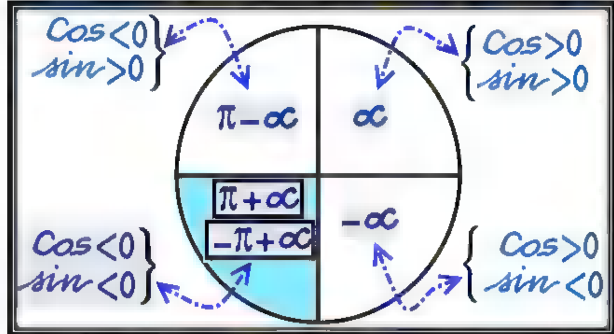
$=\sqrt{10}$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|Z.Z'|=|Z||Z'|$

$|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$Z_4=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$$
$$=\sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}-i\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=\sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{10}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{10}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\left[\sqrt{10};\frac{5\pi}{4}\right]$$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



EXERCICE 23

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=1+i\sqrt{3}$; $Z_2=-1-i\sqrt{3}$; $Z_3=-4+4i\sqrt{3}$; $Z_4=\sqrt{3}-3i$

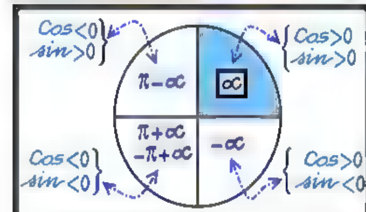
CORRECTION

- $Z_1=1+i\sqrt{3}$

$$|Z_1|=|1+i\sqrt{3}|$$
$$=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}$$
$$=2$$

$$Z_1=1+i\sqrt{3}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$$

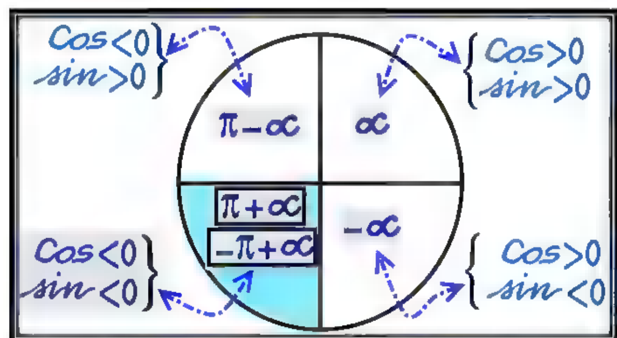
Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



- $Z_2=-1-i\sqrt{3}$

$$|Z_2|=|-1-i\sqrt{3}|$$
$$=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})}$$
$$=2$$

$$Z_2=-1-i\sqrt{3}$$
$$=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$



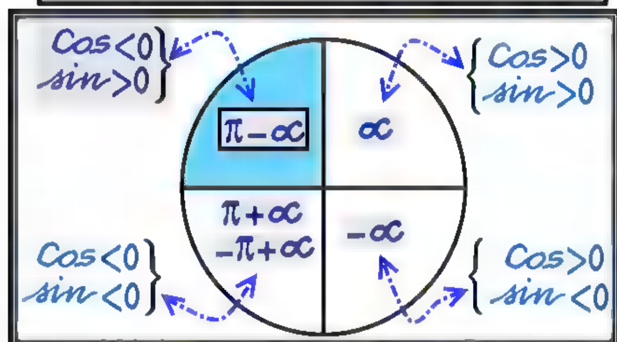
$$=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[2;\frac{4\pi}{3}\right]$$

$Z_3=-4+4i\sqrt{3}$

$$|Z_3|=\left|4\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right|$$
$$=|4|\cdot\left|-1+i\sqrt{3}\right|$$
$$=4\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}$$
$$=8$$

$$Z_3=-4+4i\sqrt{3}$$
$$=8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=8\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=8\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[8;\frac{2\pi}{3}\right]$$

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



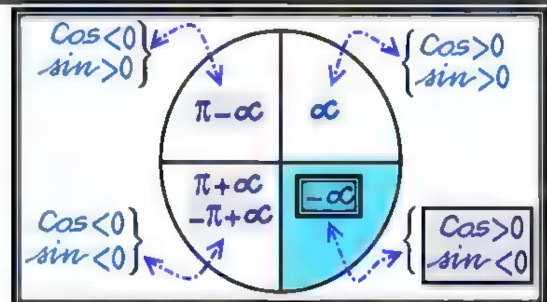
Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|Z.Z'|=|Z||Z'|$

$Z_4=\sqrt{3}-3i$

$$|Z_4|=\left|\sqrt{3}-3i\right|$$
$$=\left|\sqrt{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|$$
$$=\left|\sqrt{3}\right|\left|1-i\sqrt{3}\right|$$
$$=\sqrt{3}\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=2\sqrt{3}$$

$$Z_4=\sqrt{3}-3i$$
$$=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[2\sqrt{3};-\frac{\pi}{3}\right]$$

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



EXERCICE 24

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=\sqrt{3}+i$; $Z_2=-\sqrt{3}-i$; $Z_3=-4\sqrt{3}+4i$; $Z_4=3-i\sqrt{3}$

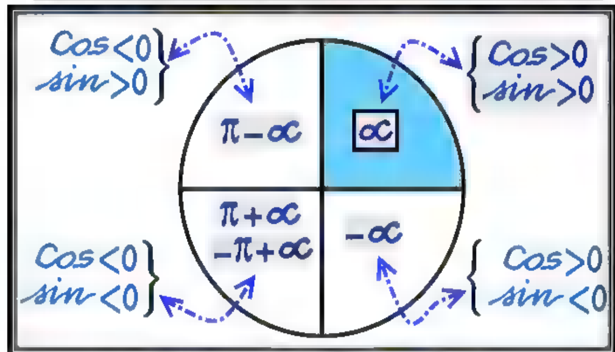
CORRECTION

- $Z_1=\sqrt{3}+i$

$$|Z_1|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$$

$$Z_1=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left[2;\frac{\pi}{6}\right]$$

Pour $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{6}$, puis utiliser le cercle ci dessous :

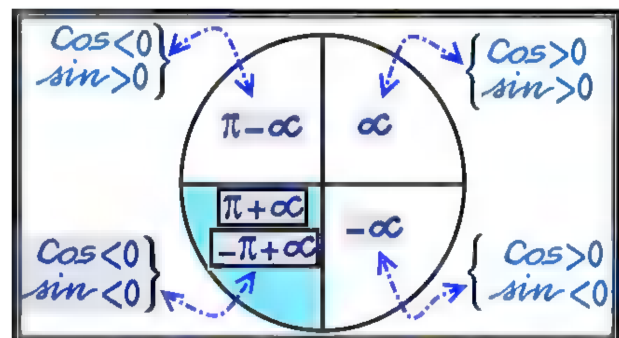


$$|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$$

- $Z_2=-\sqrt{3}-i$

$$|Z_2|=|-\sqrt{3}-i|=\sqrt{(-\sqrt{3})+(-1)^2}=2$$

$$Z_2=-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\left[2;\frac{7\pi}{6}\right]$$



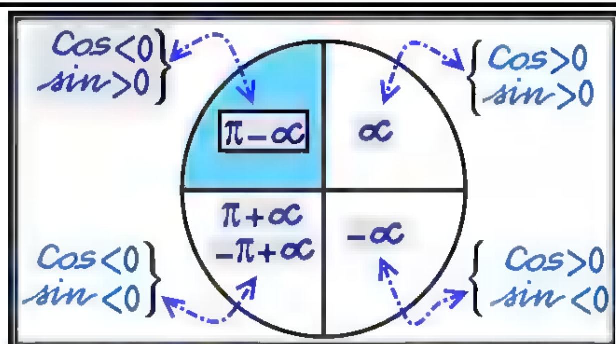
- $Z_3=-4\sqrt{3}+4i$

$$|Z_3|=|4(-\sqrt{3}+i)|=|4|\cdot|-\sqrt{3}+i|=4\sqrt{(-\sqrt{3})+1^2}=8$$

$$Z_3=-4\sqrt{3}+4i=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|Z.Z'|=|Z||Z'|$

$$= 8\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 8\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 8\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \left[8;\frac{5\pi}{6}\right]$$

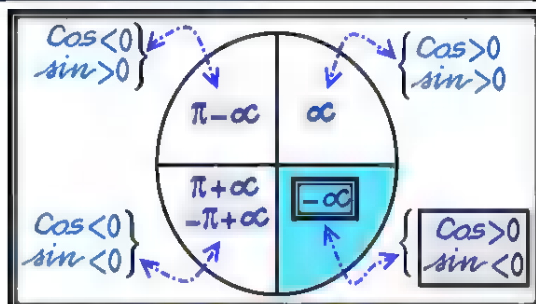


- $Z_4 = 3 - i\sqrt{3}$

$$|Z_4| = |3 - i\sqrt{3}|$$
$$= |\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)|$$
$$= |\sqrt{3}|\,|\sqrt{3}-i|$$
$$= \sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}$$
$$= 2\sqrt{3}$$

$$Z_4 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \left[2\sqrt{3};-\frac{\pi}{6}\right]$$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|Z.Z'| = |Z|\,|Z'|$



EXERCICE 25

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :
$Z_1 = 2$; $Z_2 = -2$; $Z_3 = i\sqrt{3}$; $Z_4 = -i\sqrt{5}$

CORRECTION

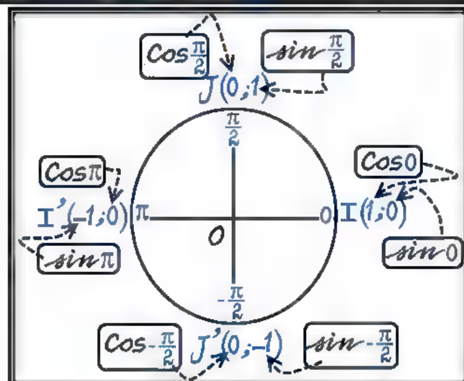
- $Z_1 = 2$

$$= 2 + 0i$$
$$= 2(1+0i)$$
$$= 2(\cos 0 + i\sin 0)$$
$$= [2;0]$$

- $Z_1 = -2$

$$= -2 + 0i$$
$$= 2(-1+0i)$$
$$= 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$= [2;\pi]$$

Ici, si $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ on pense à :
- $\alpha = 0$, si $a > 0$
- $\alpha = \pi$, si $a < 0$



$Z_3 = i\sqrt{3}$
$= 0 + i\sqrt{3}$
$= \sqrt{3}(0+i)$
$= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= \left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

$Z_4 = -i\sqrt{5}$
$= 0 - i\sqrt{5}$
$= \sqrt{5}(0-i)$
$= \sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= \left[\sqrt{5}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Ici, si $z = ai$ avec $a \in \mathbb{R}$ on pense à $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

En générale : Soit $r > 0$
- $ri = \left[r; \frac{\pi}{2}\right]$
- $-ri = \left[r; -\frac{\pi}{2}\right]$

EXERCICE 26 La valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Soient $a = 1+i$ et $b = \sqrt{3} - i$
1. Écrire a et b sous forme trigonométrique
2. Déterminer la forme algébrique de ab
3. Écrire ab sous forme trigonométrique
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
5. Montrer que $a^{40} + b^{30} \in \mathbb{R}^-$

CORRECTION

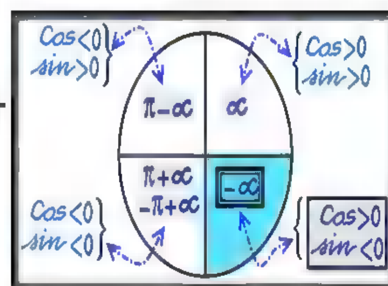
1. Une forme trigonométrique de a et b

On a : $a = 1+i$
$|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$a = 1+i$
$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
$= \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

On a : $b = \sqrt{3} - i$
$|b| = |\sqrt{3} - i|$
$= \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}$
$= 2$

$b = \sqrt{3} - i$
$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
$= \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$



2. La forme algébrique de ab

Autrement dit, déterminons les deux reéls x et y tel que $ab = x + iy$

Rappel

Écrire un nombre complexe Z sous forme algébrique, c'est-à-dire, l'écrire sous la forme unique $Z = a+ib$ avec a et b sont deux reéls
a : C'est la partie reélle de Z $(Re(Z)=a)$
b : C'est la partie imaginaire de Z $(Im(Z)=b)$

On a : $a=1+i$ et $b=\sqrt{3}-i$

$i^2=-1$

Donc $ab=(1+i)(\sqrt{3}-i)$
$=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-i^2$
$=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1$
$=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

D'où : $ab=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

3. Une forme trigonométrique de ab

Remarque

Ici, on peut pas passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, car $\arg a \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg b \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$
Et le dénominateur commun de $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{6}$ est 12
Dans ce cas, il faut utiliser la règle :
$[r;\theta]\cdot[r';\theta']=[rr';\theta+\theta']$

On a : $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ et $b=\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

Donc $ab=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\cdot\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

$=\left[\sqrt{2}\cdot 2;\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

D'où : $ab=\left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{12}\right]$

4. Déduisons la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Remarque

Pour cela, il faut juste comparer entre les deux formes (algébrique et trigonométrique) de ab

On a $ab=\left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{12}\right]$
$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$ab = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\,2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$

Et on a : $ab = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

Donc : $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

> $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

5) Montrons que : $a^{40} + b^{30} \in \mathbb{R}^-$

On a : $a = \left[\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $a^{40} = \left[\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right]^{40}$

$= \left[\sqrt{2}^{40} ; 40.\frac{\pi}{4}\right]$

$= \left[2^{20} ; 10\pi\right]$

$= \left[2^{20} ; 0\right]$

$= 2^{20}(\cos 0 + i\sin 0)$

$= 2^{20}(1+0i)$

$= 2^{20}$

> Toujours pour calculer u^n avec $u = [r;\theta]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $n > 2$, on doit utiliser la formule de Moivre suivante
>
> $u^n = [r;\theta]^n = [r^n ; n\theta]$

> $[r ; 2k\pi] = [r ; 0] = r$

et $b = \left[2 ; -\frac{\pi}{6}\right]$

Donc : $b^{30} = \left[2 ; -\frac{\pi}{6}\right]^{30}$

$= \left[2^{30} ; 30\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \left[2^{30} ; -5\pi\right]$

$= \left[2^{30} ; \pi\right]$

$= 2^{30}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= 2^{30}(-1+0i)$

$= -2^{30}$

> $[r ; (2k+1)\pi] = [r ; \pi] = -r$

On aura donc :

$a^{40} + b^{30} = 2^{20} - 2^{30}$

$= 2^{20}(1 - 2^{10})$

D'où $a^{40} + b^{30} \in \mathbb{R}^-$

EXERCICE 27

Soient $a=1+i$ et $b=-1+i\sqrt{3}$

1. Écrire a et b sous forme trigonométrique
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{b}{a}$
3. Écrire $\frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

CORRECTION

1. Une forme trigonométrique de a et b

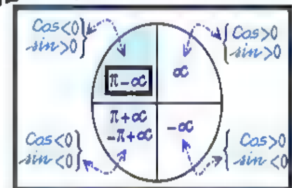
On a : $a=1+i$

$$|a|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$a=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

On a : $b=-1+i\sqrt{3}$

$$|b|=|-1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$$



$$b=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left[2;\frac{2\pi}{3}\right]$$

2. La forme algébrique de $\frac{b}{a}$

$$\frac{b}{a}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1^2+1^2}=\frac{-1+i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

D'où : $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Si $z=\frac{a+ib}{c+id}$ avec $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $(c;d)\neq(0;0)$

Alors pour déterminer la forme algébrique de z, il suffit de multiplier leur numérateur et leur dénominateur par le conjugué de ce dernier.

Et on aura

$$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

3. Une forme trigonométrique de $\frac{b}{a}$

Remarque

Ici, on peut pas passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, car $\arg a \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg b \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Et le dénominateur commun de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{3}$ est 12

Dans ce cas, il faut utiliser la règle :

$$\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$$

On a : $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ et $b=\left[2;\frac{2\pi}{3}\right]$

Donc : $$\frac{b}{a}=\frac{\left[2;\frac{2\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$$

D'où $$\frac{b}{a}=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$$

4. Déduisons la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

On a $$\frac{b}{a}=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$$

Et on a : $$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Donc : $$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

D'où : $$\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

$$z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}Re(z)=Re(z')\\ Im(z)=Im(z')\end{cases}$$

EXERCICE 28

Établir les égalités suivantes :

1 ~ $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)(1+i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84}+i\sin\frac{5\pi}{84}\right)$

2 ~ $(1+i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

3 ~ $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

1 ~ On pose $a=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, $b=1+i$ et $c=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Déterminons une forme trigométrique de a ; b et c

On a : $a=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\left[1;\frac{\pi}{7}\right]$

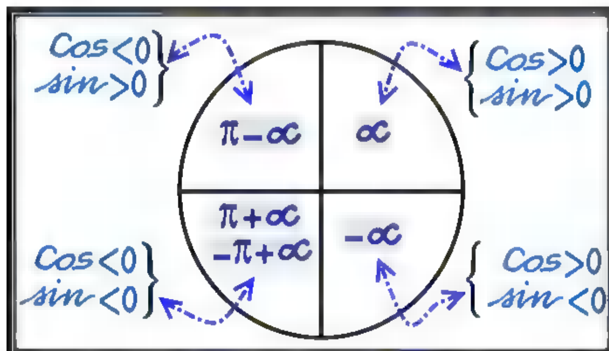
On a : $b=1+i$

$|b|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} b&=1+i\\ &=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\end{aligned}$$

On détermine d'abord le module, puis on factorise par ce dernier pour déterminer un argument

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



$$\begin{aligned} c&=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ &=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &=\left[1;-\frac{\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

Donc : $$\begin{aligned} abc&=\left[1;\frac{\pi}{7}\right]\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\left[1;-\frac{\pi}{3}\right]\\ &=\left[1.\sqrt{2}.1;\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right]\\ &=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{84}\right]\end{aligned}$$

$[r;\theta][r';\theta'][r'';\theta'']=[r.r'.r'';\theta+\theta'+\theta'']$

D'où : $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)(1+i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84}+i\sin\frac{5\pi}{84}\right)$

2 - Montrons que : $(1+i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

On pose : $a=1+i$, $b=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $c=(\sqrt{3}-i)$

On a :

- $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$
- $b=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left[1;\frac{\pi}{8}\right]$
- $c=\sqrt{3}-i$

$|c|=|\sqrt{3}-i|$

$=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}$

$=2$

$c=(\sqrt{3}-i)$

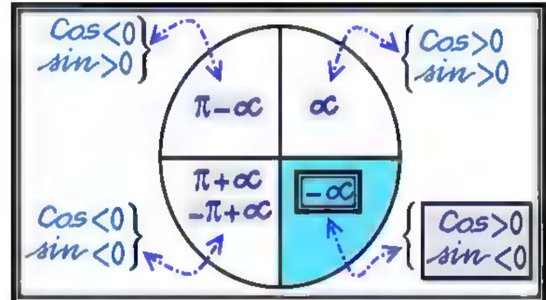
$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$=\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

Pour $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{6}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



Donc : $c=\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

Donc : $abc=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\left[1;\frac{\pi}{8}\right]\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

$=\left[\sqrt{2}.1.2;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\left[2\sqrt{2};\frac{5\pi}{24}\right]$

$[r;\theta][r';\theta'][r'';\theta'']=[r.r'.r'';\theta+\theta'+\theta'']$

D'où : $(1+i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

3 - Montrons que : $\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

On pose : $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et $b=1-i$

On a :

- $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{12}\right]$
- $b=1-i$

$|b|=|1-i|$

$=\sqrt{1^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{2}$

On détermine d'abord le module, puis on factorise par ce dernier pour déterminer un argument

$$b = 1-i$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$$

On a : $\frac{a}{b} = \frac{\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{12}\right]}{\left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,;\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[1\,;\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[1\,;\frac{\pi}{3}\right]$

$$= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

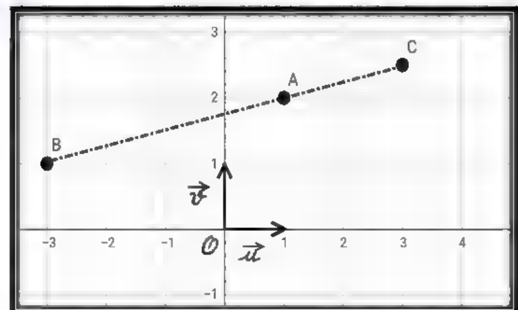
D'où : $\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 29

Dans le plan complexe muni de repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A; B et C d'affixes respectives $a = 1+2i$, $b = -3+i$ et $c = 3+\frac{5}{2}i$

1. Placer les points A; B et C.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

CORRECTION



1. On a : $a = 1+2i$, donc $A(1;2)$

On a : $b = -3+i$, donc $B(-3;1)$

On a : $c = 3+\frac{5}{2}i$, donc $C\left(3;\frac{5}{2}\right)$

2. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est :

$$b - a = -3+i-(1+2i) = -3+i-1-2i = -4-i$$

Donc $\overrightarrow{AB}(-4-i)$

L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est :

$c-a=3+\frac{5}{2}i-(1+2i)=3+\frac{5}{2}i-1-2i=2+\frac{1}{2}i$

Donc $\overrightarrow{AC}\left(2+\frac{1}{2}i\right)$

3 - Déduisons que les points A, B et C sont alignés.

On a : $c-a=2+\frac{1}{2}i$

Donc : $-2(c-a)=-2\left(2+\frac{1}{2}i\right)=-4-i$

Et puisque : $b-a=-4-i$

Alors : $b-a=-2(c-a)$

Donc $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Et par suite, les points A, B et C sont alignés.

Remarques

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $(\exists k\in\mathbb{R}^*, \overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD})$

Alors les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $(\exists k\in\mathbb{R}^*, \overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC})$

Alors les deux droites (AB) et (AC) sont confondues

Et par suite, les points A, B et C sont alignés.

S'il existe un réel k tel que : $\frac{b-a}{c-a}=k$

Alors les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 30

Dans le plan complexe muni de repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+i$; $b=4+5i$ et $c=5-2i$

1 - Placer les points A, B et C

2 - a - Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{b-a}{c-a}$

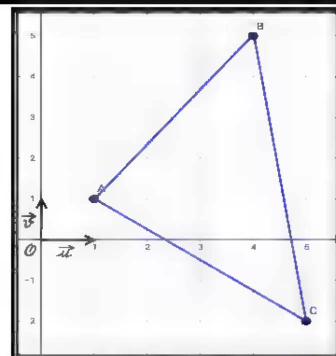
b - En déduire la nature du triangle ABC

CORRECTION

1- On a : $a=1+i$, donc $A(1;1)$

On a : $b=4+5i$, donc $B(4;5)$

On a : $c=5-2i$, donc $C(5;-2)$



2- a- Déterminons le module et un argument du nombre complexe $\frac{b-a}{c-a}$

$$Z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{4+5i-(1+i)}{5-2i-(1+i)}$$
$$=\frac{4+5i-1-i}{5-2i-1-i}$$
$$=\frac{3+4i}{4-3i}$$
$$=\frac{(3+4i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$$
$$=\frac{12+9i+16i+12i^2}{4^2+3^2}$$
$$=\frac{12+25i-12}{25}$$
$$=i$$
$$=0+i$$
$$=1(0+i)$$
$$=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$$

D'où : $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1$ et $\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b- Déduisons la nature du triangle ABC

$$\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}\ ;\ Z'\neq0$$

$$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$$

On a : $\begin{cases}\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1\\ \arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}\frac{|b-a|}{|c-a|}=1\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}|b-a|=|c-a|\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}AB=AC\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

EXERCICE 31

On considère les deux nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

1) Écrire Z_1 sous forme trigonométrique.

2) a) Écrire $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique

b) En déduire une forme trigonométrique de Z_2

CORRECTION

1) Une forme trigonométrique de Z_1

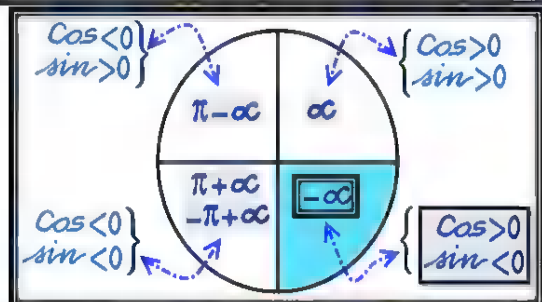
$Z_1 = 1 - i$

$$|Z_1| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$Z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right]$$

Bien sur, on va penser à l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Mais, $\begin{cases} \cos > 0 \\ \sin < 0 \end{cases}$ donc un argument de sera $\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$



2) La forme algébrique de $\frac{Z_2}{Z_1}$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1-i} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+i}{2}}{1-i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+i)(\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-i+i^2\sqrt{3}+i^2}{1^2+1^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-1}{2}$$
$$=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{-2}{4}+\frac{2i\sqrt{3}}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

D'où : $\frac{Z_2}{Z_1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

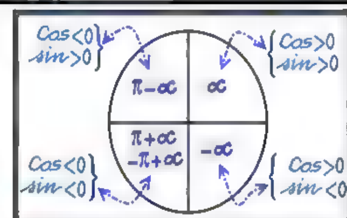
b. Déduisons une forme trigonométrique de Z_2

On a $\frac{Z_2}{Z_1}=Z_3$ avec $Z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Déterminons une forme trigonométrique de Z_3

On a $Z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$$=1\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=1\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$$

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



On a $\frac{Z_2}{Z_1}=Z_3$

Donc $Z_2=Z_1.Z_3$
$$=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$=\left[\sqrt{2}.1;-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$$

D'où : $Z_2=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$

EXERCICE 32

On considère les deux nombres complexes :

$Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

1- Déterminer une forme trigonométrique de Z_1

2- a- Écrire $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme algébrique

b- Vérifier que $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

c- En déduire une forme trigonométrique de Z_2.

CORRECTION

1- Une forme trigonométrique de Z_1

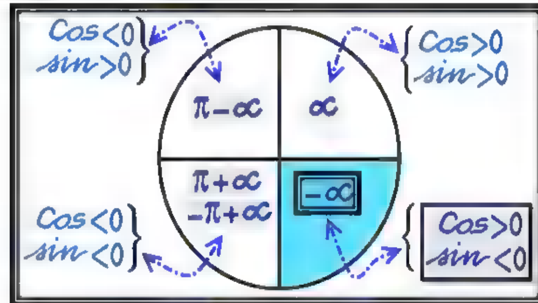
$Z_1 = 1 - i$

$|Z_1| = |1-i|$

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



$Z_1 = 1 - i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$

D'où : $Z_1 = \left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$

2- a- Déterminons la forme algébrique de $\frac{Z_2}{Z_1}$

$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}$

$= \frac{(1+i)(2+\sqrt{3}+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \frac{2+\sqrt{3}+i+2i+i\sqrt{3}+i^2}{1^2+1^2}$

$= \frac{2+\sqrt{3}+3i+i\sqrt{3}-1}{2}$

Si $Z = \frac{a+ib}{c+id}$ avec $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(c;d) \neq (0;0)$

Alors pour déterminer la forme algébrique de Z, il suffit de multiplier leur numérateur et leur dénominateur par le conjugué de ce dernier.

Et on aura

$Z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$

$=\frac{1+\sqrt{3}+3i+i\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

D'où : $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

b- Vérifions que : $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

On a : $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

D'où : $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

c- Déduisons une forme trigonométrique de z_2

On a : $\frac{z_2}{z_1}=z_3$ avec $z_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

On a : $z_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

$=(1+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=(1+\sqrt{3})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\left[1+\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right]$

Or : $\frac{z_2}{z_1}=z_3$

Donc : $z_2=z_1z_3$

$=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]\left[1+\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right]$

$[r;\theta]\cdot[r';\theta']=[rr';\theta+\theta']$

$=\left[\sqrt{2}.1;-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right]$

$=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{12}\right]$

D'où : $z_2=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{12}\right]$

EXERCICE 33

Soit $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1 - Écrire les deux nombres complexes $z_1=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ et $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$ sous forme trigonométrique

2 - On suppose que $\theta \in]\pi;2\pi[$
Écrire z_2 sous forme trigonométrique

CORRECTION

1 - Soit $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}[$
On a :

$$z_1=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}=\frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta\left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}=\frac{[1;\theta]}{[1;-\theta]}=[1;\theta-(-\theta)]=[1;2\theta]$$

$$\cos\theta\left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\cos\theta+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos\square+i\sin\square=[1;\square]$

D'où : $z_1=[1;2\theta]$

$$z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta=1+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\cos\theta=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sin\theta=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Or $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[$

Donc : $\frac{\theta}{2}\in[0;\frac{\pi}{4}[$

Donc : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$



$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$
Donc $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un module

Et par suite : $z_2=\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);\frac{\theta}{2}\right]$

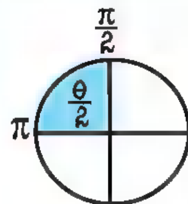
2 - On suppose que $\theta\in]\pi;2\pi[$
On a, d'après la question précédente :
$z_2=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Et puisque $\theta \in]\pi;2\pi[$

Alors : $\frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2};\pi[$

Donc : $\cos(\frac{\theta}{2})<0$

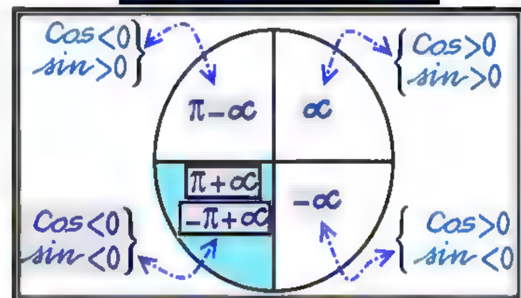
Et : $-2\cos(\frac{\theta}{2})>0$



$-2\cos(\frac{\theta}{2})>0$

Donc $-2\cos(\frac{\theta}{2})$ est un module

$a(b+c)=-a(-b-c)$



Donc : $z_2=2\cos(\frac{\theta}{2})\left(\cos(\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

$=-2\cos(\frac{\theta}{2})\left(-\cos(\frac{\theta}{2})-i\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

$=-2\cos(\frac{\theta}{2})\left(\cos(\pi+\frac{\theta}{2})+i\sin(\pi+\frac{\theta}{2})\right)$

$=\left[-2\cos(\frac{\theta}{2});\pi+\frac{\theta}{2}\right]$

D'où : $z_2=\left[-2\cos(\frac{\theta}{2});\pi+\frac{\theta}{2}\right]$

EXERCICE 34

Soit $\theta \in]0;2\pi[$

1) Écrire les deux nombres complexes $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ et $z_2=-1+\cos\theta+i\sin\theta$ sous forme trigonométrique

2) On suppose que $\theta \in]2\pi;4\pi[$

Écrire z_2 sous forme trigonométrique

CORRECTION

1) Soit $\theta \in]0;2\pi[$

On a :

$z_1=\sin\theta+i\cos\theta$

$=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$

D'où : $z_1=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$

$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\cos\square+i\sin\square=[1;\square]$

$z_2=-1+\cos\theta+i\sin\theta$

$=-1+1-2\sin^2(\frac{\theta}{2})+2i\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$

$=-2\sin^2(\frac{\theta}{2})+2i\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$

$=2\sin(\frac{\theta}{2})\left(-\sin(\frac{\theta}{2})+i\cos(\frac{\theta}{2})\right)$

$=2\sin(\frac{\theta}{2})\left(-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)$

$\cos\theta=\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})$

$=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1$

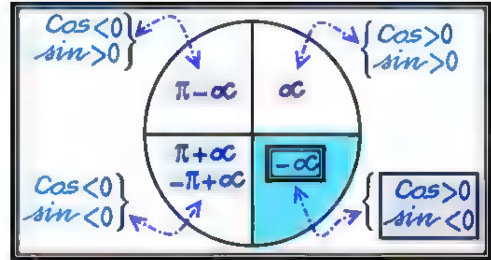
$=1-2\sin^2(\frac{\theta}{2})$

$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)+i\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)\right)$$

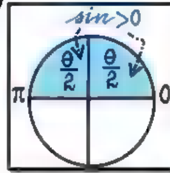
$$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$



Or $\theta\in]0;2\pi[$

Donc: $\frac{\theta}{2}\in]0;\pi[$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$



$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$

Donc $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un module

Et par suite : $z_2=\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);\pi+\frac{\theta}{2}\right]$

2. On suppose que $\theta\in]2\pi;4\pi[$

On a, d'après la question précédente :

$$z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

Et puisque $\theta\in]2\pi;4\pi[$

Alors : $\frac{\theta}{2}\in]\pi;2\pi[$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)<0$

Et : $-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$



$-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$

Donc $-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un module

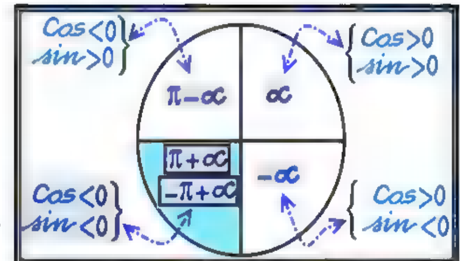
$$z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)+i\sin\left(-\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

$$=\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);-\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$



D'où : $z_2=\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);-\frac{\pi}{2}-\theta\right]$

EXERCICE 35

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=i\sqrt{3}$, $b=\overline{a}$, $c=3+2i\sqrt{3}$ et $d=\overline{c}$.
Et soit E le symétrique de D par rapport à O.

1. Déterminer l'affixe e du point E

2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{c-b}{e-b}$

b. En déduire la nature du triangle BCE

c. Vérifier que le point A est le centre de gravité du triangle BCE.

3. a. Déterminer l'affixe k du point K le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;-1)$ et $(C;2)$

b. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

c. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixe z tel que : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\| = 6$

CORRECTION

1. Déterminons e l'affixe du point E

On a E est le symétrique de D par rapport à O.

Donc O est le milieu du segment [DE]

Donc $z_O = \frac{z_D+z_E}{2}$

Donc $z_D+z_E = 2z_O$

Donc $d+e=0$ car $z_O=0$

Donc $e=-d$

Donc $e=-\overline{c}$

Donc $e=-(3-2i\sqrt{3})$

Donc $e=-3+2i\sqrt{3}$

Si A est le symétrique de B par rapport à I Alors I est le milieu de [AB]



I est le milieu du segment [AB]



$z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$

D'où $e=-3+2i\sqrt{3}$ est l'affixe du point E.

2. a. Déterminons le module et un argument du nombre complexe $\frac{c-b}{e-b}$

On a : $\frac{c-b}{e-b} = \frac{3+2i\sqrt{3}-\overline{a}}{-3+2i\sqrt{3}-\overline{a}}$

$= \frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$

$= \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$

$= \frac{3(1+i\sqrt{3})}{3(-1+i\sqrt{3})}$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(-1)^2+\sqrt{3}^2}$$

$$=-\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4}$$

$$=-\frac{1^2+2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{4}$$

$$=-\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}$$

$$=-\frac{-2}{4}-\frac{2i\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

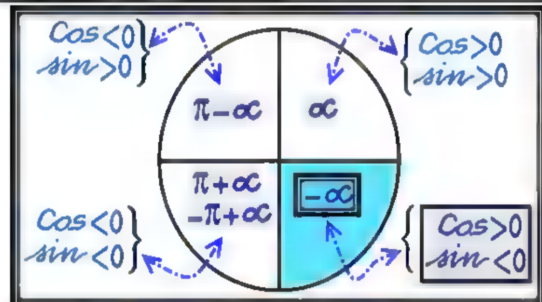
$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\left[1;-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$Z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

Pour les cas : $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$ le module est toujours égal à 1

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



D'où : $\left|\frac{c-b}{e-b}\right|=1$ et $\arg\frac{c-b}{e-b}\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

b. La nature du triangle BCE.

On a : $\begin{cases}\left|\frac{c-b}{e-b}\right|=1\\ \arg\frac{c-b}{e-b}\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{|c-b|}{|e-b|}=1\\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

$\begin{cases}|c-b|=|e-b|\\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

$\begin{cases}BC=BE\\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

D'où le triangle BCE est équilatérale

$$\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\,[2\pi]$$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}\ ;\ Z'\neq0$$

$$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$$

Remarques

Soit $\frac{b-a}{c-a}=[r;\theta]$ $(r>0)$

- Si $\boxed{r=1}$

on aura $\boxed{AC=AB}$

Donc ABC est un triangle isocèle en A

- Si $\boxed{\theta\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\left(\theta\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)}$ (Le cas où $\frac{b-a}{c-a}=ri$ avec $r\in\mathbb{R}$)

on aura $\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]}$

Et par suite, le triangle ABC est rectangle en A

- Si $\boxed{\begin{cases}r=1\\ \theta\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}}$

on aura $\boxed{\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}}$

Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

- Si $\boxed{\begin{cases}r=1\\ \theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}}$

Dans ce cas, on aura $\boxed{\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}}$

Donc le triangle ABC est équilatérale.

- Si $\boxed{\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\theta\,[2\pi]}$

Donc $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\theta\,[2\pi]}$

Et par suite θ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)}$

c- Vérifions que le point A est le centre de gravité du triangle BCE.

Rappel

G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si G est le barycentre des points pondérés $(A;k)$; $(B;k)$ et $(C;k)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ (On prend $k=1$)

Donc : $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

Pour cela, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}$

Donc, vérifions que : $Z_B-Z_A+Z_C-Z_A+Z_E-Z_A=0$

On a : $b-a+c-a+e-a=-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3+2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+(-3+2i\sqrt{3})-i\sqrt{3}$

$=3-i\sqrt{3}-3+2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

$=0$

Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}$

D'où A est le centre de gravité du triangle BCE.

3) a) Déterminons k l'affixe du point K le barycentre des points pondérés $(A;2),(B;-1)$ et $(C;2)$

Rappel

Soient a, b et c trois réels tel que : $a+b+c\neq 0$

Si le point G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$

Alors, pour tout point M, on aura.

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG}=a\,\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\,\overrightarrow{MC}$$

(C'est la propriété caractéristique du barycentre)

On a $K=\text{bary}\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$ (K existe, car $2+(-1)+2\neq 0$)

Alors, pour tout M du plan complexe, on a :

$(2+(-1)+2)\overrightarrow{MK}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

Donc $3\overrightarrow{MK}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

On prend $M=O$

On aura $3\overrightarrow{OK}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$

Donc $3k=2a-b+2c$

$=2i\sqrt{3}-\bar{a}+2(3+2i\sqrt{3})$

$=2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+6+4i\sqrt{3}$

$3k=6+7i\sqrt{3}$

D'où : $k=2+\frac{7}{3}i\sqrt{3}$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$ est $Z_A-Z_O=Z_A$ car $Z_O=0$

b- Déterminons l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que :

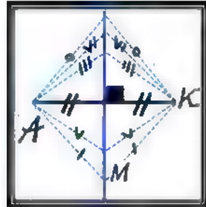
$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}\right\|$$

Donc : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$ (1)

On a $A=bary\{(B;1),(C;1),(E;1)\}$

Donc, d'après la propriété caracteristique, on a :

$(\forall M\in(\mathcal{P}));\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{MA}$



Et on a : $K=bary\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$

Donc, d'après la propriété caracteristique, on a :

$(\forall M\in(\mathcal{P}));2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MK}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$

$\left\|\alpha\overrightarrow{AB}\right\|=|\alpha|AB$

L'égalité (1) devient : $\left\|3\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MK}\right\|$

Donc $MA=MK$

D'où M appartient à la médiatrice du segment $[AK]$

Et par suite (Δ) est la médiatrice du segment $[AK]$

c- Déterminons l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tel que :

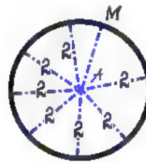
$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=6 \quad (2)$$

On a $A=bary\{(B;1),(C;1),(E;1)\}$

Donc, d'après la propriété caracteristique, on a :

$(\forall M\in(\mathcal{P}));\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{MA}$

L'égalité (2) devient : $\left\|3\overrightarrow{MA}\right\|=6$



Donc $3MA=6$

Donc $MA=2$

Donc M appartient au cercle de centre A et de rayon $R=2$
rayon $R=2$

D'où $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon $R=2$

EXERCICE 36

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C, J et H d'affixes respectives :

$a=-3-i$, $b=-2+4i$, $c=3-i$; $j=i$ et $h=-2$

1. Placer les points A, B, C, J et H

2. Montrer que le point J est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de $(\mathcal{C})$

3. Montrer que les deux droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC.
   a. Déterminer l'affixe g du point G.
   b. Placer le point G sur la figure.

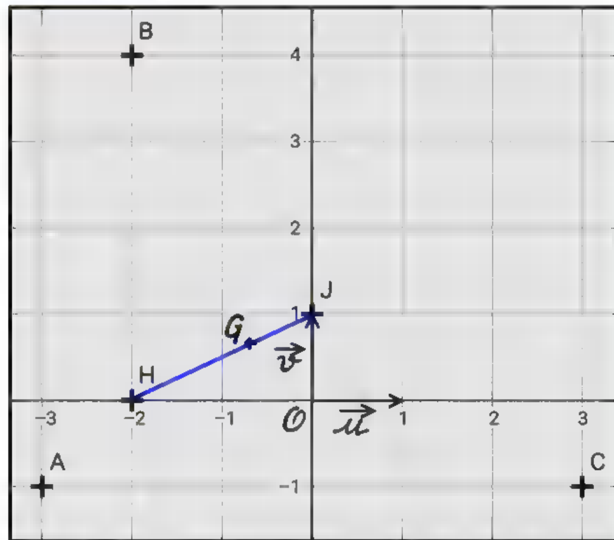
5. Montrer que les points G, J et H sont alignés.

6. On note A' le milieu du segment $[BC]$ et K celui de $[AH]$
   a. Déterminer a' et k les affixes respectives de A' et K
   b. Montrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

CORRECTION

1.

- On a $a = -3 - i$
  Donc $A(-3, -1)$
- On a $b = -2 + 4i$
  Donc $B(-2, 4)$
- On a $c = 3 - i$
  Donc $C(3, -1)$
- On a $j = i$
  Donc $J(0, 1)$
- On a $h = -2$
  Donc $H(-2, 0)$

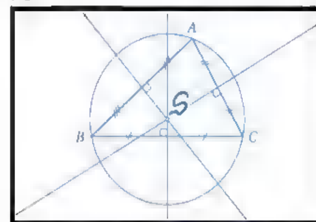


2. Montrons que le point J est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de $(\mathcal{C})$

Rappel

- $(\mathcal{E})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $A\in(\mathcal{E})$, $B\in(\mathcal{E})$ et $C\in(\mathcal{E})$
- On dit aussi que le triangle ABC est inscrit dans le cercle $(\mathcal{E})$
- Si S est le centre de $(\mathcal{E})$, alors $SA=SB=SC$

Donc S est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC.



Pour cela, il suffit de vérifier que : $AJ=BJ=CJ$.

On a : $AJ=|z_J-z_A|=|j-a|=|i-(-3-i)|=|i+3+i|=|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$BJ=|z_J-z_B|=|j-b|=|i-(-2+4i)|=|i+2-4i|=|2-3i|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$CJ=|z_J-z_C|=|j-c|=|i-(3-i)|=|i-3+i|=|-3+2i|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

Donc : $AJ=BJ=CJ$.

Donc A, B et C appartiennent au cercle de centre J

D'où le point J est le centre du cercle $(\mathcal{E})$ circonscrit au triangle ABC de rayon $R=\sqrt{13}$

3 - Montrons que : $(AH)\perp(BC)$

On a :
$$\frac{h-a}{c-b}=\frac{-2-(-3-i)}{3-i-(-2+4i)}=\frac{-2+3+i}{3-i+2-4i}=\frac{1+i}{5-5i}=\frac{1+i}{5(1-i)}=\frac{-i(1+i)}{5(1-i)}i=\frac{-i-i^2}{5(1-i)}i=\frac{1-i}{5(1-i)}i=\frac{1}{5}i=\frac{1}{5}(0+i)=\frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[\frac{1}{5};\frac{\pi}{2}\right]$$

Rappel

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, il suffit de vérifier que :
$(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

avec $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})\equiv\arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}[2\pi]$

Autrement dit $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=ri$ avec $r\in\mathbb{R}^*$

Donc $\arg \frac{h-a}{c-b} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'où $\overline{(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Et par suite $(AH) \perp (BC)$

4- a- Déterminons l'affixe g du point G.

On a G est le centre de gravité du triangle ABC.

Donc : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$

Par passage aux affixes, on aura :

$$g - a + g - b + g - c = 0$$

$$3g = a + b + c$$

$$= -3 - i - 2 + 4i + 3 - i$$

$$= -2 + 2i$$

D'où : $g = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i$

b- Voir figure (Question 1)

5- Montrons que les points G, J et H sont alignés.

$$\frac{j-h}{j-g} = \frac{i+2}{i - \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i\right)}$$

$$= \frac{i+2}{i + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} i}$$

$$= \frac{i+2}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} i}$$

$$= \frac{3(i+2)}{3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} i\right)}$$

$$= \frac{3(i+2)}{i+2}$$

$$= 3$$

Puisque $\frac{j-h}{j-g} \in \mathbb{R}$

Alors les points G, J et H sont alignés.

> Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés il suffit de vérifier que $\frac{b-a}{c-a} = k \in \mathbb{R}$

6- a- Déterminons a' et k.

On a A' est le milieu du segment $[BC]$

Donc : $a' = \frac{b+c}{2}$

$$= \frac{-2 + 4i + 3 - i}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$$

> I est le milieu du segment $[AB]$
>
> $\Updownarrow$
>
> $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

On a K est le milieu du segment [AH]

Donc : $k=\frac{a+h}{2}$

$=\frac{-3-i-2}{2}$

$=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

D'où : $k=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

6- Montrons que KHA'J est un parallélogramme

Pour cela, il suffit de vérifier que : $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{JA'}$

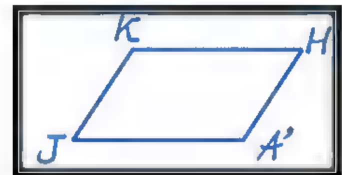
> Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
> Alors ABCD est un parallélogramme

On a : L'affixe du vecteur $\overrightarrow{KH}$ est :

$h-k=-2-\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=-2+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$



L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JA'}$ est :

$a'-j=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-i$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Donc $h-k=a'-j$

D'où : $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{JA'}$

Et par suite KHA'J est un parallélogramme

EXERCICE 37

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $a=1+i\sqrt{3}$, $b=1-i\sqrt{3}$ et $c=2$

1 - a- Écrire a, b et c sous forme trigonométrique

b- En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera son centre et son rayon.

c- Placer les points A, B et C.

2 - a- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$

b. En déduire la nature du triangle ABC, et déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$

3. Soit f la transformation du plan complexe, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=z-1+i\sqrt{3}$

a. Déterminer la nature de f

b. Vérifier que O est l'image du point B par f

c. En déduire la nature du quadrilatère OBCA.

CORRECTION

1. a. Une forme trigonométrique de a, b et c

- $a=1+i\sqrt{3}$

$|a|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

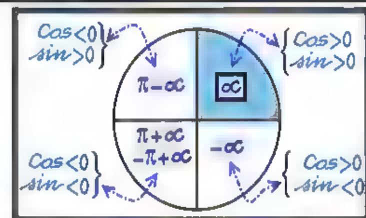
$a=1+i\sqrt{3}$

$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



- $b=1-i\sqrt{3}$

$|b|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})}=2$

$b=1-i\sqrt{3}$

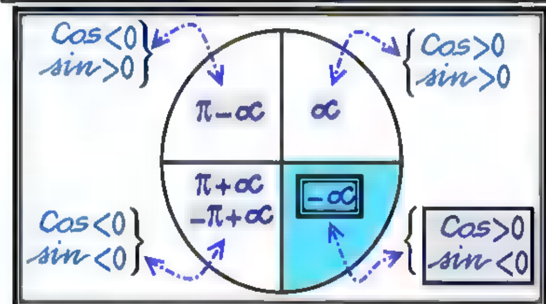
$=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$

Pour $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



- $c=2$

$=2+0i$

$=2(1+0i)$

$=2(\cos 0+i\sin 0)$

$=[2;0]$

Ici, si $z=a$ avec $a\in\mathbb{R}$ on pense à :

- $\alpha=0$, si $a>0$
- $\alpha=\pi$, si $a<0$

b. Déduisons que les points A, B et C appartiennent à un cercle.

On a : $|a|=|b|=|c|=2$

Donc $OA=OB=OC$

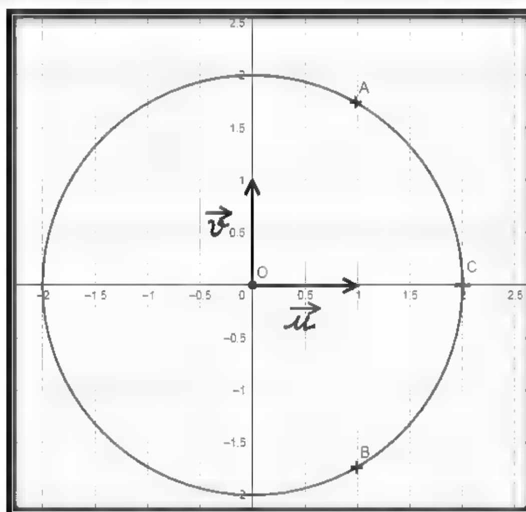
$OA=|z_A-z_O|=|z_A|$ et $z_O=0$

D'où, les points A, B et C appartiennent à un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon $R=OA=2$

c-

Explication

- On a $a=1+i\sqrt{3}$
  Donc $A(1;\sqrt{3})$
  Et puisque $A\in(\mathscr{C})$
  Alors A est l'intersection de la droite d'équation $x=1$ et le cercle $(\mathscr{C})$ avec l'ordonnée de A est positif $(\sqrt{3})$
- De même pour le point B avec l'ordonnée de B est négatif $(-\sqrt{3})$
- On a $c=2$
  Donc $C(2;0)$



2- a- Déterminons le module et un argument de $\frac{c-a}{c-b}$

$$\frac{c-a}{c-b}=\frac{2-(1+i\sqrt{3})}{2-(1-i\sqrt{3})}$$
$$=\frac{2-1-i\sqrt{3}}{2-1+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1.1+\sqrt{3}(-\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}+i\frac{1(-\sqrt{3})-1.\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2}$$
$$=-\frac{2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Si $z=\frac{a+ib}{c+id}$ avec $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $(c;d)\neq(0;0)$

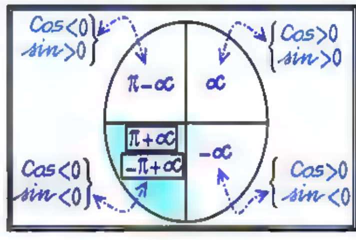
Alors pour déterminer la forme algébrique de z, il suffit de multiplier leur numérateur et leur dénominateur par le conjugué de ce dernier.

Et on aura

$$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

$$=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\left[1;\frac{4\pi}{3}\right]$$

Pour les cas : $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$ le module est toujours égal à 1



Au bien : $-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$ $\quad \frac{c-a}{c-b}=\left[1;-\frac{2\pi}{3}\right]$

D'où : $\left|\frac{c-a}{c-b}\right|=1$ et $\arg\frac{c-a}{c-b}\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$

b- Déduisons la nature du triangle ABC.

On a : $\frac{c-a}{c-b}=\frac{-(c-a)}{-(c-b)}=\frac{a-c}{b-c}$

Donc $\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=1$ et $\arg\frac{a-c}{b-c}\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$

On a : $\begin{cases}\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=1\\ \arg\frac{a-c}{b-c}\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}\frac{|a-c|}{|b-c|}=1\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}|a-c|=|b-c|\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}CA=CB\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

> $\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

> $\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}$; $Z'\neq0$

> $AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

D'où ABC est un triangle isocèle en C et $\frac{4\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté

3- a- Déterminon la nature de la transformation f

On a M(z) et M'(z')

$f(M)=M' \Leftrightarrow z'=z-1+i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z'-z=-1+i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{CA}$

> L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CA}$ est : $a-c=-1+i\sqrt{3}$

D'où f est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

Rappel

Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par la translation T

On a : $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
$\Leftrightarrow z'-z=b$
$\Leftrightarrow z'=z+b$

b- Vérifions que le point O est l'image du point B par f

Il suffit de vérifier que
$z_O=z_B-1+i\sqrt{3}$

On a : $z_B-1+i\sqrt{3}=b-1+i\sqrt{3}$
$=1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}$
$=0$
$=z_O$

Il suffit de remplacer z par b, et de vérifier que $0=b-1+i\sqrt{3}$ dans la relation $z'=z-1+i\sqrt{3}$

D'où O est l'image du point B par f

c- La nature $OBCA$.

On a : $f(B)=O \Leftrightarrow \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CA}$
D'où $OBCA$ est un parallélogramme.

EXERCICE 38

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$a=1+2i$; $b=\overline{a}$ et $c=3$

1- a- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{a-c}{b-c}$

b- En déduire la nature du triangle ABC.

2- Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par la translation T

a- Écrire z' en fonction de z.

b- Déterminer l'affixe du point D l'image du point A par la translation T.

c- En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

CORRECTION

1 a. Déterminons le module et un argument du nombre complexe $\frac{a-c}{b-c}$

Si $z=a+ib$ avec $a;b\in\mathbb{R}$
Alors $\overline{z}=a-ib$

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{1+2i-3}{1-2i-3}$$
$$=\frac{-2+2i}{-2-2i}$$

vous puovez remarquer que ac+bd =0

$$=\frac{-2(1-i)}{-2(1+i)}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}$$

$$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$$

$$=\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}$$
$$=\frac{1-2i+i^2}{2}$$

Ici, si $z=ai$ avec $a\in\mathbb{R}$ on pense à $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$

$$=\frac{1-2i-1}{2}$$
$$=-i$$
$$=0-i$$
$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]$$

En générale :
Soit $r>0$
- $ri=\left[r;\frac{\pi}{2}\right]$
- $-ri=\left[r;-\frac{\pi}{2}\right]$

D'où : $\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=1$ et $\arg\frac{a-c}{b-c}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b. Déduisons la nature du triangle ABC

$$\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\ ;\ z'\neq0$$

$$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$$

On a : $\begin{cases}\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=1\\ \arg\frac{a-c}{b-c}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}\frac{|a-c|}{|b-c|}=1\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}|a-c|=|b-c|\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}CB=CA\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

2) a) Exprimons z' en fonction de z

Rappel

Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par la translation T
On a : $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
$\Leftrightarrow z'-z=b$
$\Leftrightarrow z'=z+b$

On a : $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow z'-z=c-b$
$\Leftrightarrow z'-z=3-\overline{a}$
$\Leftrightarrow z'-z=3-(1-2i)$
$\Leftrightarrow z'-z=3-1+2i$
$\Leftrightarrow z'-z=2+2i$
$\Leftrightarrow z'-z=2+2i$
$\Leftrightarrow z'=z+2+2i$

D'où : $z'=z+2+2i$

b) Déterminons l'affixe d du point D l'image du point A par la translation T

Il suffit d'utiliser la relation $z'=z+2+2i$

On a : $T(A)=D$
Donc : $z_D=z_A+2+2i$
$d=a+2+2i$
$d=1+2i+2+2i$
$d=3+4i$
D'où : $d=3+4i$

c) La nature du quadrilatère ABCD

Si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
Alors ABCD est un parallélogramme

On a : $T(A)=D$
Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
Et par suite ABCD est un parallélogramme

EXERCICE 39

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=iz+2$

M est le point du plan complexe d'affixe z et M' celui d'affixe $f(z)$

1. Calculer $f(1)$, puis placer les points A et A' d'affixes $a=1$ et $a'=f(1)$

2. a. Déterminer la solution c de l'équation $f(z)=z$; c a pour image le point C.

   b. Donner le module et un argument de c

   c. Donner le module et un argument du nombre $\frac{a'-c}{a-c}$

   d. Quelle est la nature du triangle $AA'C$.

3. On pose $z=x+iy$ avec a et b sont deux réels.

   a. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$

   b. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel.

   c. Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

   d. Déterminer l'ensemble (G) des points $M(z)$ tel que $|f(z)|=2$

CORRECTION

1. Calculons $f(1)$

On a : $f(z)=iz+2$

Donc : $f(1)=1i+2$
$=2+i$

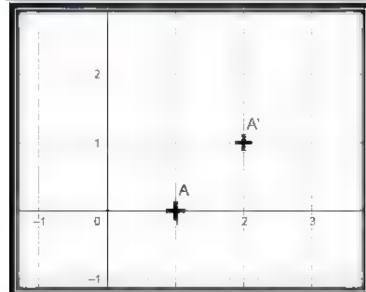
On a $a=1$

Donc $A(1,0)$

On a $a'=2+i$

Donc $A'(2,1)$

Il suffit de remplacer z par 1.



2. a. Déterminons la solution c de l'équation $f(z)=z$.

$f(z)=z \Leftrightarrow iz+2=z$

$\Leftrightarrow iz-z=-2$

juste une equation du 1 degre

$$\Leftrightarrow z(-1+i)=-2$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2}{-1+i}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2(1+i)}{(-1)^2+(-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2(1+i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=1+i$$

D'où : $c=1+i$

b. Le module et un argument de c

On détermine d'abord le module, puis on factorise par ce dernier pour déterminer un argument

$c=1+i$

$$|c|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$c=1+i$$

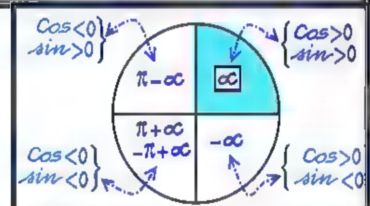
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



D'où $|c|=\sqrt{2}$ et $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c. Déterminons le module et un argument de $\frac{a'-c}{a-c}$

$$\frac{a'-c}{a-c}=\frac{2+i-(1+i)}{1-(1+i)}$$

$$=\frac{1}{-i}$$

$$=\frac{[1;0]}{\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]}$$

$$=\left[\frac{1}{1};0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$$

$ri=\left[r;\frac{\pi}{2}\right]$

$-ri=\left[r;-\frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$$

D'où : $\left|\frac{a'-c}{a-c}\right|=1$ et $\arg\frac{a'-c}{a-c}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d. La nature du triangle AA'C

On a : $\begin{cases} \left|\dfrac{a'-c}{a-c}\right| = 1 \\ \arg\dfrac{a'-c}{a-c} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \dfrac{|a'-c|}{|a-c|} = 1 \\ \overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} |a'-c| = |a-c| \\ \overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} CA' = CA \\ \overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

D'où, le triangle AA'C est rectangle isocèle en C.

> $\arg\dfrac{b-a}{c-a} \equiv \overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})}[2\pi]$
>
> $\left|\dfrac{Z}{Z'}\right| = \dfrac{|Z|}{|Z'|}$; $Z' \neq 0$
>
> $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$

3 - a - Déterminons $Re(f(z))$ et $Im(f(z))$

Soit $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On a : $f(z) = iz + 2$
$= i(x+iy) + 2$
$= ix - y + 2$
$= 2 - y + ix$

D'où $Re(f(z)) = 2 - y$ et $Im(f(z)) = x$

b - Déterminons l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(f(z)) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

> $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$

D'où (E) est la droite d'équation $x = 0$ (L'axe imaginaire)

c - Déterminons l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$

$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(f(z)) = 0$
$\Leftrightarrow 2 - y = 0$
$\Leftrightarrow y = 2$

> $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$

D'où (F) est la droite d'équation $y = 2$

d - Déterminons l'ensemble (G) des points $M(z)$ tel que $|f(z)| = 2$

$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |2 - y + ix| = 2$
$\Leftrightarrow \sqrt{(2-y)^2 + x^2} = 2$
$\Leftrightarrow (2-y)^2 + x^2 = 2^2$
$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2$

> $(a-b)^2 = (b-a)^2$

D'où (G) est le cercle de centre $D(0;2)$ et de rayon $R = 2$

> L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R

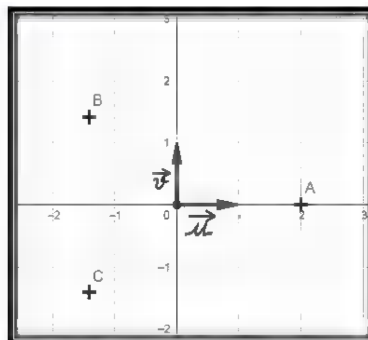
EXERCICE 40

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_C=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1. Placer les points A, B et C
2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B}{z_C}$
   b. Que peut-on déduire ?
3. Soit I le milieu du segment [AB]
   a. Montrer que le triangle OAB est isocèle.
   b. Déterminer un argument du nombre z_B, puis en déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$
   c. Calculer z_I l'affixe du point I, puis le module de z_I
   d. Déduire des résultats précédents, les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

CORRECTION

1. On a $z_A=2$
   Donc $A(2;0)$
   On a $z_B=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
   Donc $B(-\sqrt{2};\sqrt{2})$
   On a $z_C=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
   Donc $C(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$



2. a. Déterminons le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B}{z_C}$

On a $\frac{z_B}{z_C}=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$
$=\frac{-\sqrt{2}(1-i)}{-\sqrt{2}(1+i)}$
$=\frac{1-i}{1+i}$

$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$

$$=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}$$
$$=\frac{1-2i+i^2}{2}$$
$$=\frac{1-2i-1}{2}$$
$$=-i$$
$$=0-i$$
$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$\frac{z_B}{z_C}=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]$$
D'où : $\left|\frac{z_B}{z_C}\right|=1$ et $\arg\frac{z_B}{z_C}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

Ici, si $z=ai$ avec $a\in\mathbb{R}$ on pense à $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$

En générale : Soit $r>0$
- $ri=\left[r;\frac{\pi}{2}\right]$
- $-ri=\left[r;-\frac{\pi}{2}\right]$

b- Déduction

On a : $\begin{cases}\left|\frac{z_B}{z_C}\right|=1\\ \arg\frac{z_B}{z_C}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}\frac{|z_B-z_O|}{|z_C-z_O|}=1\\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

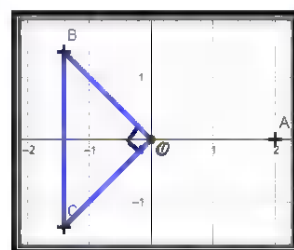
Donc : $\begin{cases}|z_B-z_O|=|z_C-z_O|\\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}OB=OC\\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

$\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$; $z'\neq0$

$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$



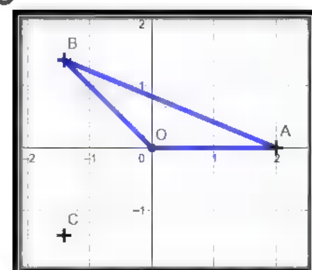
D'où, le triangle OBC est rectangle isocèle en O

3 - a - Montrons que le triangle OAB est isocèle

On a : $OA=|z_A-z_O|=|z_A|=|2|=2$

Et : $OB=|z_B-z_O|=|z_B|=|-\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2}=2$

Et par suite le triangle OAB est isocèle en O.



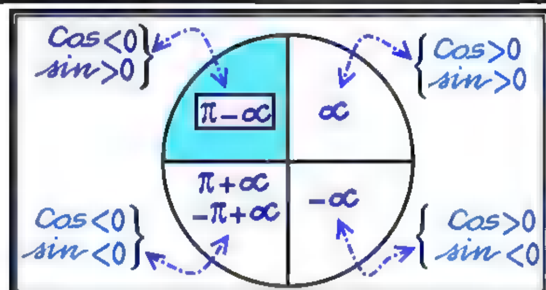
b. Déterminons un argument du nombre z_B

$z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$|z_B| = |-\sqrt{2} + i\sqrt{2}|$
$= |\sqrt{2}(-1+i)|$
$= |\sqrt{2}| \cdot |-1+i|$
$= \sqrt{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}\sqrt{2}$
$= 2$

Des fois, pour calculer le module d'un complexe, ça sera mieux de factoriser pour ne pas avoir des grands nombres sachant que $|z.z'| = |z||z'|$

Pour $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut penser à l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$, puis utiliser le cercle ci dessous :



$z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$
$= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
$= \left[2 ; \frac{3\pi}{4}\right]$

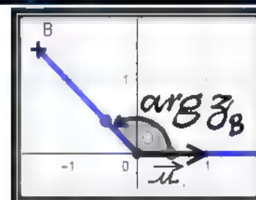
D'où : $\arg z_B \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

Déduisons une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{OI}})$

On a : $\arg z_B \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

$\arg z_B \equiv (\overline{\vec{u} ; \overrightarrow{OB}}) [2\pi]$

Donc : $(\overline{\vec{u} ; \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

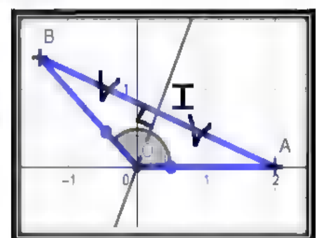


Donc une mesure de l'angle $(\overline{\vec{u} ; \overrightarrow{OB}})$ est $\frac{3\pi}{4}$

Puisque le triangle OAB est isocèle en O.

Alors la médiane (OI) issue de O est aussi bissectrice de l'angle $(A\hat{O}B)$

Une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{OI}})$ est donc : $\frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$



c. Calculons z_I

Puisque I est le milieu du segment [AB]

Alors : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le module de z_I

$|z_I| = \left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-2\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1-\sqrt{2}+1} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

D'où $|z_I| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

d. Les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

On sait que : $\overline{(\vec{u};\overrightarrow{OI})} \equiv \arg z_I\ [2\pi]$

et que $\frac{3\pi}{8}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$

Donc $\frac{3\pi}{8}$ est un argument de z_I

Donc $z_I = |z_I|\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

Donc $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{z_I}{|z_I|}$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}+i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}^{\,2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}+i\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Donc : $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$

EXERCICE 41

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $a=2-3i$, $b=i$ et $c=6-i$

Première partie

1. Placer les points A, B et C
2. Calculer $\frac{b-a}{c-a}$
3. En déduire la nature du triangle ABC.

Deuxième partie

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

1. Soit D le point d'affixe $d=1-i$
   Déterminer d' l'affixe du point D' image du point D par f
2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$
   b. Montrer que E est un point de la droite (AB).
3. Montrer que pour tout point M distinct du point B, $OM'=\frac{AM}{BM}$
4. Montrer que pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :
   $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}[2\pi]$
5. Montrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Montrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

CORRECTION

Première partie

1.

On a $a = 2 - 3i$

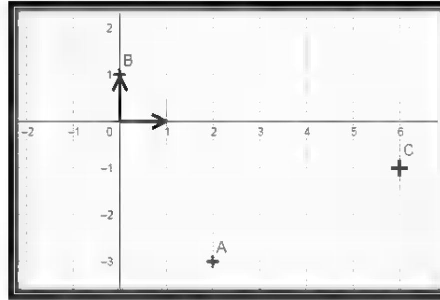
Donc $A(2;-3)$

On a $b = i$

Donc $B(0;1)$

On a $c = 6 - i$

Donc $C(6;-1)$



2. Calculons $\frac{b-a}{c-a}$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{i-(2-3i)}{6-i-(2-3i)}$$
$$= \frac{i-2+3i}{6-i-2+3i}$$
$$= \frac{-2+4i}{4+2i}$$
$$= \frac{2(-1+2i)}{2(2+i)}$$
$$= \frac{-1+2i}{2+i}$$
$$= \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$= \frac{-2+i+4i-2i^2}{2^2+1^2}$$
$$= \frac{-2+5i+2}{5}$$
$$= i$$

$$z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

Ici, on a : $ac+bd=0$
Donc forcement $z = ri$

$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$

3. On a : $\frac{b-a}{c-a} = i$
$$= 0 + i$$
$$= 1(0+i)$$
$$= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \left[1;\frac{\pi}{2}\right]$$

Ici, si $z = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ on pense à $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

En générale :
Soit $r > 0$
- $ri = \left[r;\frac{\pi}{2}\right]$
- $-ri = \left[r;-\frac{\pi}{2}\right]$

Donc : $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1$ et $\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg\frac{b-a}{c-a}\equiv(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

$\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}$; $Z'\neq0$

$AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

On a : $\begin{cases}\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1\\ \arg\frac{b-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}\frac{|b-a|}{|c-a|}=1\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}|b-a|=|c-a|\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}AB=AC\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en A

Deuxième partie

1 ~ On a $f(M)=M' \Leftrightarrow z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$ avec $M(z)$ et $M'(z')$

Or : $f(D)=D'$ avec $D(d)$ et $D'(d')$

Donc : $d'=\frac{i(d-2+3i)}{d-i}$

$=\frac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i}$

$=\frac{i(-1+2i)}{1-2i}$

$=\frac{-i(1-2i)}{1-2i}$

$=-i$

D'où : $d'=-i$

2 ~ a ~ Montrons qu'il existe un unique point E tel que $f(E)=E'$ avec $z_{E'}=2i$

(On dit aussi que le point E' d'affixe $2i$ admet un antécédent)

Il suffit donc de prouver que l'équation $z'=2i$ admet une unique solution

$z'=2i \Leftrightarrow \frac{i(z-2+3i)}{z-i}=2i$

$\Leftrightarrow i(z-2+3i)=2i(z-i)$

$\Leftrightarrow iz-2i+3i^2=2iz-2i^2$

$\Leftrightarrow iz-2i-3=2iz+2$

$\Leftrightarrow iz-2iz=2+3+2i$

$\Leftrightarrow -iz=5+2i$

$\Leftrightarrow i(-iz)=i(5+2i)$

$\Leftrightarrow z=5i+2i^2$

$\Leftrightarrow z=5i-2$

> $i^2=-1$
>
> $i(-i)=1$

On a : $z'=2i \Leftrightarrow z=-2+5i$

Donc l'équation $z'=2i$ admet une unique solution $z=-2+5i$

Et par suite, il existe un unique point E tel que

$f(E)=E'$ avec $z_{E'}=2i$ et $z_E=-2+5i$

b. Montrons que $E\in(AB)$

Pour cela, il suffit de montrer que les points A, B et E sont alignés

$$\frac{z_E-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2+5i-(2-3i)}{i-(2-3i)}$$
$$=\frac{-2+5i-2+3i}{i-2+3i}$$
$$=\frac{-4+8i}{-2+4i}$$
$$=\frac{4(-2+4i)}{-2+4i}$$
$$=4$$

> Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés il suffit de vérifier que $\frac{b-a}{c-a}=k\in\mathbb{R}$

Puisque $\frac{z_E-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

Alors les points A, B et E sont alignés

D'où $E\in(AB)$

3. Montrons que pour tout point M distinct du point B,

$OM'=\frac{AM}{BM}$ avec $M'=f(M)$

On a : $M'=f(M)\Rightarrow z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

$$\Rightarrow |z'|=\left|\frac{i(z-2+3i)}{z-i}\right|$$

$$\Rightarrow |z'|=\frac{|i(z-2+3i)|}{|z-i|}$$

> Attention, ici, on a juste l'implication
> En générale
> Si $z=z'\Rightarrow|z|=|z'|$
> La réciproque est fausse
> Exemple : $|2+3i|=|3+2i|$
> mais $2+3i\neq 3+2i$

> $\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{|Z|}{|Z'|}$; $Z'\neq 0$

$$\Rightarrow |z'| = \frac{|i| \cdot |z-2+3i|}{|z-i|}$$ $|i|=1$

$$\Rightarrow |z'| = \frac{|z-2+3i|}{|z-i|}$$

$$\Rightarrow |z'| = \frac{|z-(2-3i)|}{|z-i|}$$

$$\Rightarrow |z_{M'}-z_O| = \frac{|z_M-z_A|}{|z_M-z_B|}$$

$$\Rightarrow OM' = \frac{AM}{BM}$$

$|z_{M'}-z_O| = OM'$
$|z_M-z_A| = AM$
$|z_M-z_B| = BM$

D'où : $OM' = \frac{AM}{BM}$, pour tout $M \neq B$

4 - Montrons que pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : $M' = f(M)$

Donc : $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

$\arg ZZ' \equiv \arg Z + \arg Z' [2\pi]$

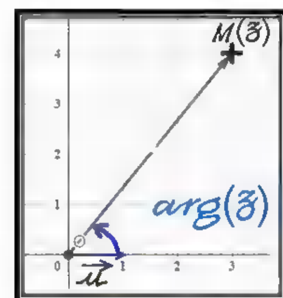
$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{i(z-2+3i)}{z-i}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg(i) + \arg\frac{z-(2-3i)}{z-i}\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg(i) + \arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)[2\pi]$$



Or : $\begin{cases} \arg(z') \equiv (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'})[2\pi] \\ \arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right) \equiv (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})[2\pi] \end{cases}$

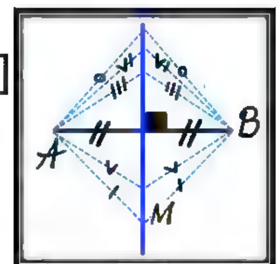
Et par suite : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

5 - Montrons que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Soit M un point de la médiatrice du segment [AB]

Donc $AM = BM$

Donc $\frac{AM}{BM} = 1$



Et comme $OM'=\dfrac{AM}{BM}$

Donc, on aura $OM'=1$

D'où M' appartient au cercle de centre O et de rayon $R=1$

6 ↳ Montrons que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

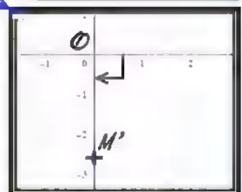
✎ Soit M' appartient à l'axe des imaginaires purs, tel que $M' \neq B$

Donc: $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$



Et comme : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

(d'après le résultat de la question 4)

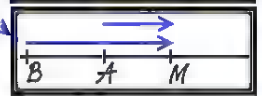


Alors $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc: $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) \equiv -\pi[2\pi]$



D'où $M \in (AB)$



EXERCICE 42

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4-2i$, $b=i$ et $c=\frac{4}{3}$

1 ↳ Montrer que les points A, B et C sont alignés

2 ↳ En déduire que C est l'image de A par une homothétie de centre B dont on donnera le rapport

CORRECTION

1 ↳ Montrons que les points A, B et C sont alignés

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{\frac{4}{3}-i}{4-2i-i}=\frac{\frac{4}{3}-i}{4-3i}$$

Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés il suffit de vérifier que $\frac{c-b}{a-b}=k \in \mathbb{R}$

$$=\frac{3\left(\frac{4}{3}-i\right)}{3(4-3i)}$$

$$=\frac{4-3i}{3(4-3i)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

Puisque $\frac{c-b}{a-b}\in\mathbb{R}$

Alors les points A, B et C sont alignés

2 - On a : $\frac{c-b}{a-b}=\frac{1}{3}$

Donc : $c-b=\frac{1}{3}(a-b)$

Donc : $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

D'où C est l'image de A par

par l'homothétie de centre B et de rapport $k=\frac{1}{3}$

> Si $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$
>
> Alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k

EXERCICE 43

On considère la transformation h d'écriture complexe :

$$z'=-3\left(z-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i\right)$$

1 - Déterminer le point fixe de h (noté Ω)

2 - Déterminer la nature de h

3 - a - Déterminer z_A l'affixe du point A image du point O

b - En déduire que les points O, A et Ω sont alignés.

CORRECTION

1 - Soit Ω le point invariant par h

Donc $h(\Omega)=\Omega$

On remplace z' et z par z_Ω

On aura :

$$z_\Omega=-3\left(z_\Omega-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i\right)$$

$$=-3z_\Omega+4-8i$$

$$z_\Omega+3z_\Omega=4-8i$$

$$4z_\Omega=4-8i$$

$$z_\Omega=1-2i$$

> Le centre de l'homothétie h est le point invariant
>
> $h(\Omega)=\Omega$

D'où h admet un point d'affixe $z_\Omega=1-2i$

2 - a - La nature de h

On a $z'=-3z+4-8i$

Et $z_\Omega=-3z_\Omega+4-8i$

Donc $z'-z_\Omega=-3z+4-8i-(-3z_\Omega+4-8i)$

$=-3z+4-8i+3z_\Omega-4+8i$

$=-3z+3z_\Omega$

D'où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -3

3 - a - On a A est l'image du point O par h

Donc : $z_A=-3\left(z_O-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i\right)$

$z_A=-3\left(-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i\right)$

$z_A=4-8i$

D'où : $z_A=4-8i$

$z_O=0$

Il suffit de remplacer z' par z_A et z par z_O dans l'expression $z'=-3\left(z-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i\right)$

b - Déduisons que les points O, A et Ω sont alignés.

On a $h(O)=A$

Donc : $\overrightarrow{\Omega O}=-3\overrightarrow{\Omega A}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ sont colinéaires

D'où, les points O, A et Ω sont alignés.

EXERCICE 44

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega=1-2i$ et de rapport -3

Soit M' le point d'affixe z', image du point M d'affixe z par l'homothétie h

1 - Montrer que : $z'=-3z+4-8i$

2 - a - Déterminer z_A l'affixe du point A image du point O

b - En déduire que les points O, A et Ω sont alignés.

CORRECTION

1 - Montrons que : $z'=-3z+4-8i$

$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=-3\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z'-\omega=-3(z-\omega)$

$\Leftrightarrow z'-\omega=-3z+3\omega$

$\Leftrightarrow z'=-3z+4\omega$

$\Leftrightarrow z'=-3z+4(1-2i)$

$\Leftrightarrow z'=-3z+4-8i$

D'où : $z'=-3z+4-8i$

2 - a - On a A est l'image du point O par h

Donc : $z_A=-3z_O+4-8i$ $\quad z_O=0$

D'où : $z_A=4-8i$

b - Déduisons que les points O, A et Ω sont alignés.

On a $h(O)=A$

Donc : $\overrightarrow{\Omega O}=-3\overrightarrow{\Omega A}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ sont colinéaires

D'où, les points O, A et Ω sont alignés.

EXERCICE 45

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\frac{1}{2}i\,z_n+5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n

On considère le point A d'affixe $z_A=4+2i$

1 - Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=z_n-z_A$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

a - Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}i\,u_n$

b - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$

2 - Montrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

CORRECTION

1 - a - Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}=\frac{1}{2}i\,u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a $u_n=z_n-z_A$

Donc

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=z_{n+1}-z_A\\&=\frac{1}{2}i\,z_n+5-(4+2i)\\&=\frac{1}{2}i\,z_n+5-4-2i\\&=\frac{1}{2}i\,z_n+1-2i\\&=\frac{1}{2}i\left(z_n+\frac{2}{i}-2i\cdot\frac{2}{i}\right)\\&=\frac{1}{2}i\left(z_n+\frac{2(-i)}{i(-i)}-4\right)\\&=\frac{1}{2}i(z_n-4-2i)\\&=\frac{1}{2}i(z_n-(4+2i))\\&=\frac{1}{2}i(z_n-z_A)\\&=\frac{1}{2}i\,u_n\end{aligned}$$

$i(-i)=1$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}=\frac{1}{2}i\,u_n$

b - Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0=z_0-z_A=0-4-2i=-4-2i=\left(\frac{1}{2}i\right)^0(-4-2i)$

L'égalité est donc vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$

Montrons que : $u_{n+1}=\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(-4-2i)$

On a : $u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$ (d'après la supposition)

Donc $\frac{1}{2}i\,u_n=\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)=\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(-4-2i)$

Donc : $u_{n+1}=\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(-4-2i)$ car $u_{n+1}=\frac{1}{2}i\,u_n$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ u_n=\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$

2 . Montrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a z_n-z_A est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

Donc u_n est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

Et u_{n+4} est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_{n+4}}$

Et on a :
$$\begin{aligned} u_{n+4} &= \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i)\\ &= \left(\frac{1}{2}i\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}(-4-2i)\\ &= \left(\frac{1}{16}\right)\cdot i^4\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}(-4-2i)\\ &= \frac{1}{16}u_n \end{aligned}$$

$$i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$$

$$z_{n+1}-z_A=\frac{1}{16}(z_n-z_A)$$

Donc $\overrightarrow{AM_{n+4}}=\frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ sont colinéaires

D'où, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

قَالَ رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

كُلُّ أُمَّتِي يَدْخُلُونَ الجَنَّةَ إِلَّا مَنْ أَبَى

قَالُوا : وَمَنْ يَأْبَى يَا رَسُولَ اللهِ ؟

قَالَ : مَنْ أَطَاعَنِي دَخَلَ الجَنَّةَ ، وَمَنْ عَصَانِي فَقَدْ أَبَى

رواه البخاري

تَعَلَّمُوا العِلْمَ



بقلم : البشير

